TD d'Algèbre du mercredi 29 novembre 2006

1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 3 \\ 6x & + & 6y & + & 2z & + & 5t & = & 7 \\ 9x & + & 12y & + & 3z & + & 10t & = & 13 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & 4 \\ 4x & + & 3y & + & z & + & t & = & 5 \\ 6x & + & 11y & + & 3z & + & 2t & = & 2 \\ x & - & 7y & - & z & + & 2t & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2a_1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2a_2 \\ & & & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 2a_{n-1} \\ x_1 & + & & & & + & x_n & = & 2a_n \end{array}\right.$$

2

Résoudre, en discutant suivant le paramètre réel m les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & m^2y & + & z & = & m \\ x & + & my & + & mz & = & 1 \end{array}\right.$$

3

Montrer que $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & b \\ b & b & x \end{vmatrix} = (x+a+b)(x-a)(x-b)$ et $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix} = 0.$

4

Que vaut le produit des deux déterminants $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$?

En déduire la valeur de Δ_1.

5

Les matrices suivantes sont-elles semblables ? équivalentes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6

Donner la décomposition $D+N$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7

Soient A et B deux ensembles de cardinal n et $p \leq n$.

(1) Quel est le nombre d'applications de A dans B ?

(2) On note $s(n,k)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments. Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} s(n,k)$. (Remarquer qu'une application de A dans B est la donnée d'une surjection de A sur une partie de B.)

(3) En déduire $s(n,p)$ (Considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la matrice est celle du système linéaire reliant $(0^n, \ldots, n^n)$ à $\big(s(n,0), \ldots, s(n,n)\big)$.)