**Prépa CAPES UPMC 2006** Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

## TD d'Algèbre du mercredi 08 novembre 2006

### 1. Spectre d'un polynôme d'endomorphisme

Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le spectre de $P(f)$ en fonction de $P$ et du spectre de $f$.

### 2. Algèbre des matrices circulantes

Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Soit $M_X$ la matrice carrée de taille $n$ dont les coefficients sont $M_{X\,i,j} = x_{\sigma^{i-1}(j)}$, où $\sigma$ est la permutation circulaire $\sigma(j) = j-1$ si $n \geq j > 1$, $\sigma(1) = n$.

**2.1.** Montrer que la construction ci-dessus définit une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une base de son image.

**2.2.** Calculer le polynôme caractéristique de $M_X$ (Commencer par le cas où $X$ est le vecteur $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, puis exprimer $M_X$ comme un polynôme de $M_{e_n}$, et utiliser ensuite l'exercice précédent).

### 3. Endomorphismes de translation

Soit $E$ une espace vectoriel de dimension finie, et $U$ un endomorphisme de $E$. Soit $\Phi$ (resp. $\Psi$) l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui même qui à un endormorphisme $V$ associe $U \circ V$ (resp. $V \circ U$).

**3.1.** Montrer que $\Phi$ et $\Psi$ sont des applications linéaires. Exprimer leurs noyaux en fonction du noyau et de l'image de $U$.

**3.2.** Montrer que le spectre de $\Phi$ coïncide avec celui de $U$. Etant donné une valeur propre $\lambda$ de $U$, déterminer la dimension de l'espace propre associé à $\lambda$ pour $\Phi$.

**3.3.** Montrer que si $U$ est diagonalisable, alors $\Phi$ et $\Psi$ le sont aussi.

### 4. Lemme de Hadamard

**4.1.** On dit qu'une matrice $A = \big((a_{i,j})\big)_{i,j}$ à coefficient complexe a une diagonale dominante sur les lignes si pour tout $i$ on a $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer qu'une telle matrice est inversible.

**4.2.** En déduire que les valeurs propres d'une matrice à coefficients complèxes sont localisées dans une union de disques dont on précisera les centres et le rayons.

**4.3.** Soit $P(X) = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_1 X + c_0$ un polynôme à coefficients complèxes. Montrer que ses racines sont soit dans la boule de centre $-c_{d-1}$ et de rayon 1, soit de module inférieur à $R = max\{|c_0|, 1+|c_1|, 1+|c_2|, 1+|c_{d-2}|\}$. (On pourra considérer la matrice $C$ compagnon de $P$ :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix}$$

dont on calculera le polynôme caractéristique.)

**4.4.** Montrer que les racines de $P$ sont soit de module inférieur à 1, soit dans la boule de centre $-c_{d-1}$ et de rayon $\sum_{l=0}^{d-2} |c_l|$.

## 5. Matrices de van der Monde

Soit $\mathrm{VDM}(x_0, \ldots, x_n)$ la matrice de van der Monde de taille $n+1$ associée aux paramètres complexes $x_0, \ldots, x_n$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on pose $V(t) = \mathrm{VDM}(x_0+t, \ldots, x_n+t)$. On suppose les $x_i$ deux à deux distincts ($V(t)$ est donc inversible pour tout $t$). Montrer que la matrice $V(t+1)(V(t))^{-1}$ ne dépend pas de $t$. Quelle est cette matrice.

## 6. Méthode de Putzer

Soit $M$ une matrice complexe carrée, et $P(X) = X^k + c_{k-1}X^{k-1} + \cdots + c_1 X + c_0$ un polynôme annulateur de $M$. Soit $C$ la matrice d'ordre $k$ compagnon de $P$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

et $Z(t) = (z_1(t), \ldots, z_k(t))$ la solution de $\dfrac{dZ}{dt}(t) = CZ(t)$ telle que $Z(0) = (1, 0, \ldots, 0, 0)$.

**6.1.** On suppose que les racines de $P$ sont simples. Donner une base de vecteurs propres de ${}^tC$.

**6.2.** Montrer que $exp(tM) = z_1(t)Id + z_2(t)M + \cdots + z_k(t)M^{k-1}$. (Avec cette méthode, il n'est pas nécessaire de trouver la forme de Jordan de $M$ pour calculer son exponentielle).

**6.3.** Dans le cas (générique) où les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $M$ sont toutes distinctes, exprimer les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ tels que $exp(M) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l M^l$ en fonction des $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (introduire une matrice de van der Monde).

**6.4.** Toujours dans l'hypothèse où les valeurs propres de $M$ sont deux à deux distinctes, montrer que

$$exp(tM) = \sum_{l=1}^{n} e^{t\lambda_l} \prod_{p \neq l} \frac{M - \lambda_p Id}{\lambda_l - \lambda_p}.$$

**6.5.** On suppose que $M$ est une matrice $2 \times 2$. Montrer que

$$exp(tM) = e^{t\lambda}(Id - t(M - \lambda Id))$$

si les deux valeurs propres sont égales à $\lambda$ et que

$$exp(tM) = \frac{\lambda_1 e^{t\lambda_2} - \lambda_2 e^{t\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} Id + \frac{e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} M$$

si les deux valeurs propres sont $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On remarquera que $M$ vérifie

$$M^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)M + \lambda_1\lambda_2 Id = 0.$$