Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 20 décembre 2006

1

Etant donné n points $A_1, \ldots, A_n$ dans le plan affine peut-on trouver n points $B_1, \ldots, B_n$ tels que A_1 soit le milieu du segment $[B_n, B_1]$, et A_i le milieu du segment $[B_{i-1}, B_i]$, pour $i \in \{2, \ldots, n\}$?

2

Soit A une matrice 2×2, à coefficients réels, ayant deux valeurs propres distinctes. Discuter, selon les valeurs de $tr(A)$ et $det(A)$, l'allure des trajectoires des solutions de l'équation différentielle $X' = AX$. Déterminer les limites et les asymptotes lorsqu'elles existent.

3

On considère la forme quadratique $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$. Donner la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée. Trouver une base orthogonale.

4. Inégalité de Hadamard

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ une matrice carrée à coefficients réels. Montrer que :

$$|det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2}.$$

(appliquer le procédé d'orthogonalisation de Schmidt au colonnes de A) et déterminer dans quels cas il y a égalité.

5. Moindres carrés

On considère p vecteurs $V_1, \ldots, V_p$ indépendants dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard. Soit G la matrice de Gramm associée : $G_{i,j} =< V_i | V_j >$.

5.1. Montrer que G est définie positive.

5.2. Exprimer en fonction de G la distance entre un point de coordonnées $X \in \mathbb{R}^n$ et le sous-espace vectoriel F engendré par $V_1, \ldots, V_p$.

5.3. On fait aux instants $t_1, \ldots, t_N$ N mesures physiques représentées par N réels $m_1, \ldots, m_N$. On cherche une fonction affine $f : x \mapsto f(x) = ax + b$ qui approxime le mieux ces mesures au sens des moindres carrés, i.e. on cherche les deux réels a et b tels que

$$\sum_{i=1}^{N} |at_i + b - m_i|^2$$

soit le plus petit possible. Montrer que a et b existent, et donner leur expression en fonction des m_i et des t_i. Préciser cette expression dans le cas $N = 5, t_1 = -2, t_2 = -1, t_3 = 0, t_4 = 1, t_5 = 2$.

5.4. Même question pour une approximation par un polynôme de degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

6. Formule de Cayley

6.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $Id - A$ est inversible et que $(Id + A)(Id - A)^{-1}$ est orthogonale.

6.2. Montrer toute matrice orthogonale sans valeur propre égale à -1 est de cette forme.

7

7.1. Soit $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Soit $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ Q(x,y,z) = 1\}$. Dessiner sommairement H.

7.2.
- Soit $C : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $t \mapsto (cos(t), sin(t), 0)$. On note $v(t) = \dfrac{dC(t)}{dt}$ le « vecteur vitesse ».
- Soit R_+ l'union pour $t \in [0, 2\pi[$ des droites passant par $C(t)$, ayant pour vecteur directeur $(0,0,1) + v(t)$.
- Soit R_- l'union pour $t \in [0, 2\pi[$ des droites passant par $C(t)$, ayant pour vecteur directeur $(0,0,1) - v(t)$.

Comparer R_+, R_- et H.
(Ils sont égaux. R_+ et R_- décrivent les deux manières de régler l'hyperboloïde a 1 nappe).

8

Étant donné un tétraèdre $ABCD$ et un plan P dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition la projection orthogonale $A'B'C'D'$ de $ABCD$ sur P est-elle un parallélogramme ?

9

Soit $OABC$ un tétraèdre tri-orthogonal ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux à deux orthogonaux) et soient G l'isobarycentre de ce tétraèdre et S le symétrique de O par rapport a G. Montrer que S est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.