Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 17 janvier 2007

1

Soit $M = \big((m_{i,j})\big)$ une matrice carrée symétrique de taille n et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2$

2

Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ 4 droites distinctes du plan, concourantes 2 à 2 et non concourantes 3 à 3. On note $P_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j$ (pour $1 \leq i < j \leq 4$), Q_1 le milieu de $[P_{12}, P_{34}]$, Q_2 celui de $[P_{13}, P_{24}]$ et Q_3 celui de $[P_{14}, P_{23}]$. Montrer que ces 3 milieux sont alignés.

3

On considère un triangle ABC et on note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques d'un point P, par rapport à A, B, C.

3.1. Montrer que, pour tout point M, on a :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2.$$

3.2. Montrer que P appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = 0.$$

3.3. Montrer que cette dernière condition est équivalente à :

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} = 0$$

où a, b, c sont les longueurs des cotés BC, AC, BC (en supposant que α, β, γ sont non nuls).

4

On considère un tétraèdre $OABC$. Exprimer son volume en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ et de leurs produits scalaires. Reformuler ce résultat en fonction des longueurs a, b, c des cotés BC, AC, AB et α, β, γ des cotés OA, OB, OC.
(Indication : comparer le volume du tétraèdre et celui du parallélépipède engendré par les 3 vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Exprimer ce dernier volume comme le déterminant d'un matrice M. Calculer $\det(M\,{}^tM)$.)

5

On considère dans le plan :
– un triangle ABC,
– les projections orthogonales A', B', C' des points A, B, C sur l'axe Ox,
– la droite Δ_A passant pas A', perpendiculaire à BC,
– la droite Δ_B passant pas B', perpendiculaire à AC,
– la droite Δ_C passant pas C', perpendiculaire à AB.
Montrer que ces 3 droites sont concourantes.