Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 24 janvier 2007

1

(cours) Etablir la formule donnant la distance d'une droite D à un point M, la droite etant définie par un point A et un vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}\|}{\|\overrightarrow{V}\|}.$$

Déterminer la distance entre la droite D passant par 0 et dirigée par $(1,1,1)$ et la droite D' d'équations $z = 0, y + x = 1$.

2

Miroir parabolique : les rayons parallèles à l'axe d'une parabole sont réfléchis en un point (le foyer). Etablir cette propriété par le calcul. (Indication : montrer qu'on peut supposer la parabole définie par l'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$)

3

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Reconnaître la transformation de $\mathbb{R}^3$ de matrice M.

4

Déterminer toutes les transformations linéaire de $\mathbb{R}^3$ telles que l'image d'un vecteur soit perpendiculaire à celui-ci. (Montrer que si f vérifie cette propriété alors il existe un vecteur v tel que $f(x) = x \wedge v$)

5

Soit A un point dans $\mathbb{R}^3$. À tout point M sur le cercle d'équations $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, on associe le plan P_M orthogonal en M à la droite AM. Montrer que tous les plans P_M passent par un point commun.