Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 7 février 2007

1

On considère donc la forme bilinéaire $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$, sur $M_n(\mathbb{R})$.

1.1. Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices diagonales, en donner une base orthonormée.

1.2. Déterminer l'orthogonal de la droite des matrices scalaires. En donner une base orthonormée pour n=3.

2

2.1. Soit AB une corde d'une hyperbole H. On considère le parallélogramme ayant AB comme diagonale et ayant ses cotés parallèles aux asymptotes de H. Montrer que la seconde diagonale passe par le centre de H. (indication : il suffit de considérer l'hyperbole xy=k)

2.2. Soit H une hyperbole. La tangente à H en un point A coupe les assymptotes en a et a'. La tangente à H en un autre point B coupe les assymptotes en b et b'. Montrer que les droites ab' et $a'b$ sont parallèles.

3

On considère l'ellipse E d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ et une droite vectorielle D d'équation $y = mx$.

3.1. Montrer que le lieu des milieux des cordes de E parallèles à D est un segment d'une droite D' passant par l'origine. Déterminer le coefficient directeur de cette droite.

3.2. Déterminer le lieu des milieu des cordes de E parallèles à D'.

4

On considère un cône d'axe Oz et deux sphères S et S' disjointes « chacune étant coincée dans ce cône comme une boule dans un cornet de glace », c'est à dire : tangentes chacune au cône le long d'un cercle. On considère un plan P tangent à S en F, tangent à S' en F' et coupant le cône selon une ellipse.

4.1. Montrer que F et F' sont les foyers de l'ellipse. (Montrer que $MF + MF'$ est indépendant du point M sur l'ellipse.)

4.2. Application : On considère une orange sphérique posée sur une table éclairée(s) par une source lumineuse ponctuelle. Montrer que l'ombre de l'orange sur la table est délimitée par une ellipse, et que le point de contact entre l'orange et la table en est l'un des foyers.