TD d'Algèbre du mercredi 14 février 2007

1. Un exo qui figure noir sur blanc dans le programme du capes

« La plus grande valeur propre d'un matrice symétrique A est égale à $\sup \left\{ \frac{{}^t\!XAX}{{}^t\!XX},\ X \neq 0 \right\}$. »

2

On considère un triangle non dégénéré dans le plan, et une conique passant pas les trois sommets. A chaque sommet, on associe le point d'intersection de la tangente à la conique au sommet considéré avec la droite passant par les 2 sommets opposés (on suppose que ces 3 points existent). Le but de l'exercice est de montrer que ces 3 points sont alignés.

2.1. Montrer qu'on peut se ramener au cas particulier où le triangle est formé des points de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$.

2.2. Montrer que la conique peut alors être définie par une équation du type $ax(x-1)+by(y-1)+cxy=0$.

2.3. Donner les équations des trois tangentes à la coniques aux sommets du triangle.

2.4. Calculer les point d'intersection définis plus haut et conclure.

3. Mouvement des planètes

On considère un mouvement $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan privé de l'origine tel que les fonctions x et y soient solutions du système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{-x(t)}{r(t)^3} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{-y(t)}{r(t)^3} \end{array} \right.$$

où $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.
On admet que cela modélise le mouvement d'un corps soumis à l'attraction du soleil. Le but de l'exercice est de montrer que les trajectoires possibles du mouvement sont des coniques.

3.1. On pose $C(t) = \det \begin{pmatrix} x(t) & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ y(t) & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$. Montrer que $C(t)$ est un fonction constante.

3.2. Montrer que la fonction $r(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{-r(t)}{r(t)^3} + G(t).$$

Exprimer la fonction $G(t)$ en fonction de $r(t)$ et de C.

3.3. Astuce de Lagrange. Montrer que la fonction $r(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (E), non homogène, à coefficients non constants, et que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions de l'équation homogène (E_0) associée.

3.4. Trouver une fonction constante solution de l'équation (E) (exprimer cette solution en fonction de C).

3.5. Montrer qu'il existe des constantes a, b et c telles que $r(t) = ax(t) + by(t) + c$. (Penser au théorème fondamental sur la structure de l'espace des solutions des équations différentielles linéaires).

3.6. En déduire que les trajectoires possibles du mouvement $t \mapsto (x(t), y(t))$ sont des coniques.

4

4.1. Montrer que deux coniques se rencontrent en au maximum 4 points.

4.2. Montrer que par 5 points « génériques » du plan (non aligné 3 à 3) passe une unique conique.