

Test d'Algèbre du mercredi 5 septembre 2007

Voici quelques exercices de difficulté variable, présentés sous la forme d'une mini-interrogation, à nous rendre sur papier libre, anonyme si vous le souhaitez.

Il ne s'agit pas pour nous de vous évaluer. Le but est de faire le point sur vos réflexes, afin de mieux cibler notre approche pédagogique. Essayez donc de répondre le plus honnêtement possible, sans complexes, de manière précise mais concise! Durée : 1h30.

1. EXERCICE 1.

Soient r et s deux nombres complexes. Calculer le terme général de la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = (r + s)u_n - rsu_{n-1}$.

2. EXERCICE 2.

Dessiner approximativement l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Re}(z) = 1\}$, ainsi que son image par les applications $z \mapsto z^2$ et $z \mapsto e^z$.

3. EXERCICE 3.

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. EXERCICE 4.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(M)$.

5. EXERCICE 5 : PENTAGONE ET NOMBRE D'OR

Dans cet exercice on identifie le plan avec \mathbb{C} . On considère le cercle $C = \{|z| = 1\}$, et le cercle C' , de centre $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

5.1. Déterminer l'affixe de X , intersection du segment $\left[1, \frac{i}{2}\right]$ et du cercle C' , ainsi que le module de $X - 1$.

5.2. Soit C'' le cercle de centre 1 passant par X . Calculer l'affixe de Y , intersection de C et de C'' ayant une partie imaginaire positive.

5.3. Soit Z le point d'affixe réelle tel que le triangle $1, Y, Z$ soit isocèle en Y . Calculer l'affixe de Z .

5.4. Montrer que le triangle $0, Z, Y$ est isocèle en Z . Montrer que les triangles $1, Y, Z$ et $1, 0, Y$ sont semblables. Montrer que dans ces deux triangles les deux angles identiques ont une valeur double de celle du troisième.

5.5. En déduire l'argument de Y .

5.6. Expliquer brièvement comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas.