 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

Feuille d'exercices du mercredi 12 septembre 2007

Nombres complexes

1. Exercice 1.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(M)$:

(1) directement, par la formule $\exp(M) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$,

(2) en diagonalisant d'abord M.

2. Exercice 2.

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Exercice 3 : pentagone et nombre d'or

Dans cet exercice on identifie la plan avec $\mathbb{C}$. On considère le cercle $C = \{|z| = 1\}$, et le cercle C', de centre $\frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

3.1. Déterminer l'affixe de X, intersection du segment $\left[1, \frac{i}{2}\right]$ et du cercle C', ainsi que le module de $X - 1$.

3.2. Soit C'' le cercle de centre 1 passant par X. Calculer l'affixe de Y, intersection de C et de C'' ayant une partie imaginaire positive.

3.3. Soit Z le point d'affixe réelle tel que le triangle $1, Y, Z$ soit isocèle en Y. Calculer l'affixe de Z.

3.4. Montrer que le triangle $0, Z, Y$ est isocèle en Z. Montrer que les triangles $1, Y, Z$ et $1, 0, Y$ sont semblables. Montrer que dans ces deux triangles les deux angles identiques ont une valeur double de celle du troisième.

3.5. En déduire l'argument de Y.

3.6. Expliquer brièvement comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

4. Exercice 4.

Soit $z_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$. Pour $k \in \{0, \dots, 4\}$, on pose $z_k = z_1^k$.

4.1. Placer approximativement ces 5 nombres complexes dans le plan.

4.2. Déterminer le module et l'argument de $z_0 + z_2$.

4.3. Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe (i.e. l'application de la forme $z \mapsto az + b$) qui envoie z_0 sur z_1 et z_4 sur z_2. Dessiner approximativement et sans calcul les images de z_1, z_2 et z_3.

5. Exercice 5.

Soient θ un nombre réel et n un nombre entier. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

6. Exercice 6.

Etant donné n nombres complexes non-nuls, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de leurs modules soit égale au module de leur somme. (Traiter d'abord le cas $n = 2$, puis faire une récurrence.)

7. Exercice 7.

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts. Montrer que les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

(1) a, b, c sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.

(2) $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c$.

(3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$

(4) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$

8. Exercice 8.

Etant donné un triangle ABC, on considère les points A', B', C' tels que les triangles ABC', BCA', CAB' soient équilatéraux et extérieurs au triangle ABC.

Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

9. Exercice 9.

Soient a, b, c trois nombres complexes deux à deux distincts. Déterminer l'affixe de l'orthocentre du triangle dont les sommets sont d'affixes a, b, c.

10. Exercice 10.

Soit $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - z_i)^{m_i}$ un polynôme à coefficients complexes.

(1) Calculer $\frac{P'}{P}$

(2) Montrer que si z est une racine de P' alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{z - z_i} = 0$.

(3) Montrer que les racines de la dérivée P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P. (Exprimer une racine de P' comme barycentre des racines de P.)

11. Exercice 11.

Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle z, z^2, z^3 soit rectangle en z.

12. Exercice 12.

Soit ABC un triangle direct, et D un point à l'intérieur de ABC. Soient E et F les points tels que BAE et ACF soient directement semblables à BCD. Montrer que $AEDF$ est un parallélogramme.