TD d'Algèbre du mercredi 19 septembre 2007

1

Soient a et b deux nombres complexes et r un nombre réel strictement positif. Montrer que l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = r$ est un cercle (préciser son centre et son rayon) ou une droite. (Indication : commencer par traiter le cas $a = -b$.)

2. Homographies

2.1. **La droite projective complexe.** On note $\mathbb{P}$ « la droite projective complexe », c'est à dire l'union de $\mathbb{C}$ et d'un point dit « à l'infini » et noté ∞.

2.1.1. Montrer que toute homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (où a, b, c, d sont 4 nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$), se prolonge de manière *naturelle* en une *bijection* $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$.

2.1.2. Soient h le prolongement à $\mathbb{P}$ de $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ et h' celui de $z \mapsto \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$. Montrer que $h \circ h'$ est égal au prolongement à $\mathbb{P}$ de $z \mapsto \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')}$.

2.2. **Le groupe des homographies.**

2.2.1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies possède une structure de groupe *naturelle*.

2.2.2. Montrer que ce groupe est engendré par les similitudes directes et l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$.

2.2.3. À la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ on associe l'homographie $h_A : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ qui est le prolongement *naturel* de l'application $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que cela induit un morphisme de groupes $GL_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$. En déterminer l'image et le noyau.

2.3. **Cercles.** On appelle « cercles » de $\mathbb{P}$ les cercles de $\mathbb{C}$ et les droites de $\mathbb{C}$ auxquelles on ajoute le point à l'infini. Montrer que l'image d'un cercle de $\mathbb{P}$ par une homographie est un cercle de $\mathbb{P}$.

2.4. **Birapport.** Soient z_1, z_2, z_3, z_4 4 nombres complexes distincts. Leur *birapport* est le nombre complexe :

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}.$$

2.4.1. Donner une extension *naturelle* de la définition du birapport aux quadruplets d'éléments distincts de $\mathbb{P}$.

2.4.2. Montrer qu'une homographie laisse invariant le birapport de 4 éléments distincts de $\mathbb{P}$.

2.4.3. Montrer qu'une application de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$, qui laisse invariant le birapport de 4 éléments distincts de $\mathbb{P}$, est une homographie.

2.4.4. Étant donné trois éléments distinct de $\mathbb{P}$, montrer qu'il existe une unique homographie qui les envoie sur $0, 1, \infty$.

2.4.5. Montrer qu'une homographie est complètement déterminée par l'image de trois points distincts de $\mathbb{P}$.

2.5. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes distincts et $\mathcal{H}_{z_1,z_2}$ le sous-groupe de $\mathcal{H}$ formé des homographies qui ont z_1 et z_2 comme points fixes. Soit $h : z \mapsto \frac{z-z_1}{z-z_2}$.

2.5.1. Quel est le conjugué de $\mathcal{H}_{z_1,z_2}$ par l'élément h ?

2.5.2. En déduire que $\mathcal{H}_{z_1,z_2}$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2.5.3. Est-il vrai que toute homographie possède deux points fixes dans $\mathbb{P}$?

2.6. Déterminer le sous-groupe de $\mathcal{H}$ formé des homographies qui ont ∞ comme point fixe.

2.7. Soit $h : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ une homographie. Tracer approximativement les lignes de niveau des deux fonctions à valeurs réelles suivantes : $z \mapsto |h(z)|$ et $z \mapsto \arg(h(z))$. (Indication : commencer par traiter le cas des similitudes directes et de l'application $z \mapsto 1/z$.)

3

Montrer que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les affixes de 4 points alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel. (Indication : considérer d'abord le cas $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$.)