TD d'Algèbre du mercredi 3 octobre 2007

1

Montrer que tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe du groupe des bijections de G.

2

2.1. Les similitudes directes forment-elles un sous groupe distingué du groupe des homographies ?

2.2. Les homothéties forment-elles un sous-groupe du groupe des similitudes ?

2.3. Décrire complètement le groupe des similitudes qui laissent invariant l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral. (Donner les éléments du groupe et la table de multiplication.) Même question pour un carré, pour un rectangle.

3. Permutations

3.1. Montrer que toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_p$, où les σ_i sont des cycles opérants sur des parties disjointes de $\{1, \ldots, n\}$. Déterminer l'ordre de σ en fonction de celui des σ_i.

3.2. Soient $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.
Calculer a^{201}, b^{198}, c^{1000}.

4. Permutations, suite.

4.1. Montrer que le groupe des permutations S_n est engendré par les transpositions $(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)$.

4.2. Monter que S_n est engendré par $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n)$.

4.3. Montrer que S_n est engendré par $t = (1, 2)$ et $c = (1, 2, \ldots, n)$. Indication : calculer c^k et $c^k t c^{-k}$.

5

5.1. Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G. Est-il vrai que G est isomorphe à $H \times (G/H)$?

5.2. Montrer que cela est bien le cas si G/H est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

6

Décrire tous les groupes qui n'ont pas de sous-groupe non trivial.

7

Déterminer, à isomorphisme de groupes près, tous les groupes d'ordre 4 ainsi que ceux d'ordre 6. (En donner les tables de multiplication.)

8. Propriétés élémentaires des groupes.

Les questions suivantes sont largement indépendantes.

8.1. Montrer qu'un groupe où tous les éléments sont d'ordre 2 est commutatif.

8.2. Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 est distingué.

8.3. Montrer qu'un groupe ne peut être égal à l'union de deux sous-groupes propres.

8.4. Montrer qu'un groupe d'ordre pair possède un élément d'ordre 2.

8.5. Montrer que dans le groupe des automorphismes d'un groupe donné, l'ensemble des automorphismes intérieurs est un sous-groupe distingué.

9

Soient H et G des groupes finis, et $\varphi : H \to G$ un morphisme de groupes.

9.1. Montrer que φ induit une application $\hat{\varphi}$ des classes de conjugaison de H vers les classes de conjugaison de G.

9.2. On suppose que $\hat{\varphi}$ est une bijection. Montrer que φ est un isomorphisme de groupe.

10

Si G est un groupe on note $Z(G)$ le centre de G : $Z(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}$, c'est à dire l'ensemble des éléments de G qui « commutent » avec tous les autres.

10.1. Montrer que le centre d'un groupe d'ordre p^n (avec p premier et $n \in \mathbb{N}^*$) n'est pas réduit à l'élément neutre. (On pourra montrer que le cardinal des classes de conjugaisons est égal à 1 ou est multiple de p, et conclure.)

10.2. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2 (avec p premier) est abélien. (On pourra montrer que le groupe est engendré par 2 éléments, dont l'un au moins est dans son centre.)