Prépa CAPES UPMC 2006 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 17 octobre 2007

1

Soit X un ensemble fini, et G un groupe fini agissant sur X. Pour tout $x \in X$ on note Gx l'orbite de x sous l'action de G, G_x le stabilisateur de x, et X^g l'ensemble des éléments de X qui sont laissés invariants par g. Le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$. L'ensemble des orbites de G dans X est noté $\frac{X}{G}$

1.1. Montrer que $|G/G_x| = |Gx|$.

1.2. Montrer que $\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x|$.

1.3. Montrer que $\sum_{y \in G_x} \frac{1}{|Gy|} = 1$.

1.4. Formule de Cauchy. Montrer que le nombre d'orbites de l'action de G sur X est égal à la moyenne pour $g \in G$ des cardinaux des ensembles X^g. Autrement dit :

$$\left|\frac{X}{G}\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

1.5. Déduire le théorème de Lagrange de cette relation.

2. Symétries et coloriages du cube.

2.1. On considère les sous-groupe H des isométries directes de $\mathbb{R}^3$ qui préservent le cube. Déterminer l'orbite d'un sommet, et le stabilisateur d'un sommet. En déduire le cardinal de H.

2.2. L'action de H sur les grandes diagonales détermine un morphisme de H vers S_4. Déterminer son noyau.

2.3. Décrire explicitement les éléments de H, et pour chacun d'eux le nombre de cycles de la permutation induite sur l'ensemble des faces.

2.4. Déterminer le nombre de coloriages des faces du cube par trois couleurs, qui ne sont pas équivalents à rotation près.

3. Colliers.

On appelle *collier* à n perles et k couleurs une classe d'équivalence de mots de longueur n dans un alphabet à k lettres, deux mots étant équivalents si et seulement si on peut obtenir l'un de l'autre par permutation circulaire.
Autrement dit, un collier est une orbite de l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le groupe groupe cyclique à n éléments, agissant par permutations circulaires sur l'ensemble $X = \{1, 2, \ldots, k\}^n$ des mots à n lettres écrit dans un alphabet à k lettres. On identifie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à $\{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ où g est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, l'élément g^i du groupe agit par permutation circulaire de i crans vers la droite. Notons $a(n, k)$ le nombre d'orbites de cette action.

3.1. On considère le cas $n = 6$. Déterminer le nombre de cycle de chacune des 6 permutations induites sur X. En déduire le nombre $a(6,3)$ de colliers de 6 perles à 3 couleurs.

3.2. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, déterminer l'ordre de g^i en fonction du pgcd de i et de n.

3.3. Soit σ_i la permutation de X induite par g^i. Montrer que tous les cycles de σ_i ont la même longueur. En déduire que le nombre de cycles de σ_i est égal à au pgcd de i et de n.

3.4. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, déterminer $|X^{g^i}|$ puis $a(n,k)$.

3.5. Montrer que si $n = p$ est premier, alors $a(p,k) = \dfrac{1}{p}\big((p-1)k + k^p\big)$.

3.6. En déduire le petit théorème de Fermat.

3.7. Pour tout entier m, on note $\varphi(m)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et m et premiers à m. Calculer $\varphi(x)$ pour $x = 1, \ldots, 12$.

3.8. Soit d un diviseur de n. Montrer que le nombre d'éléments d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal à $\varphi(d)$.

3.9. Montrer que $a(n,k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) k^{n/d}$.

3.10. Théorème de Polya. A toute permutation g, on associe le nombre $c_i(g)$ de cycles de longueur i dans la décomposition de g.

Soit G un groupe fini agissant par permutation sur un ensemble fini A de cardinal n. On considère

$$Z_G(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_1^{c_1(g)} X_2^{c_2(g)} \ldots X_n^{c_n(g)}.$$

Soit B un ensemble fini. Montrer que G agit naturellement sur l'ensemble des fonctions de A dans B, et que le nombre d'orbites de cette action est $Z_G(|B|, |B|, \ldots, |B|)$.