

TD d'Algèbre du mercredi 21 novembre 2007

1

Effectuer la division euclidienne de $X^m - a^m$ par $X^p - a^p$ et établir une condition sur m et p pour que le reste soit nul.

2

Soit K le corps commutatif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : K = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}\}$.

2.1. Montrer qu'un polynôme de $K[X]$ de degré d ayant $d + 1$ racines est nul.

2.2. Est-il vrai qu'un polynôme P dont la fonction polynomiale associée ($K \rightarrow K, x \mapsto P(x)$) est nulle est nul?

2.3. Montrer que dans $K[X], \prod_{i=1}^{p-1} (X - \alpha_i) = X^{p-1} - 1$.

2.4. Montrer que pour tout nombre premier strictement positif $p, (p - 1)! + 1$ est divisible par p .

3

Soit $P \in \mathbb{Z}[X], n \in \mathbb{Z}$ et $m = P(n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}, P(n + km)$ est divisible par m . En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non constant P dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}, P(n)$ est premier.

4

4.1. Montrer que la racine carrée d'un nombre entier est soit un nombre entier, soit un nombre irrationnel.

4.2. On considère l'ensemble E des réels se la forme $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, où a, b, c sont des rationnels. Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} , donner sa dimension.

5

Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} , les fonctions $f_n : t \mapsto \sin^n(t)$ sont-elles indépendantes?

6

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $\phi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer qu'il existe une base de E et une base de F telles que la matrice de ϕ dans ces bases soit à coefficient tous nuls, ou éventuellement égaux à 1 sur la diagonale.

7

Déterminer la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

8

Soient $x_i, i \in \{0, \dots, n\}$ une suite de $n + 1$ réels tous distincts. On considère la famille de formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ définies par $\phi_i(P) = P(x_i)$. Montrer qu'elle forme une base de $R_n[X]^*$. Déterminer la base duale.

9

On considère la famille de polynômes $\binom{X}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{X - k + 1}{k}, n \in \mathbb{R}$.

9.1. Montrer qu'il forment une base de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer la base duale (indication : considérer la forme linéaire qui à un polynôme P associe $P(1) - P(0)$.)

9.2. Soit P un polynôme prenant des valeurs entières sur tous les entiers. Montrer que P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes $\binom{X}{n}$.

10

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E . Soit F^\perp l'ensemble des formes linéaires définies sur E et nulles sur F . Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E^* et déterminer sa dimension en fonction de celle de F .

11

Soient a et b deux nombres complexes et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = az + b\bar{z}$. Montrer que f induit un endomorphisme de \mathbb{R}^2 , dont on explicitera le noyau et l'image.

12

Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'une espace vectoriel E de dimension finie pour qu'il existe un automorphisme de E transformant E_1 et E_2 .

13

Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel. Montrer que $\text{Id} + f$ est inversible.