Prépa CAPES UPMC 200è-2008 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN

TD d'Algèbre du mercredi 28 novembre 2007

1

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)-\dim(F) \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}$

2

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de pgcd D et de ppcm M.

3.1. Montrer que $\ker P(f) \cap \ker Q(f) = \ker D(f)$

3.2. Montrer que $\ker P(f) + \ker Q(f) = \ker M(f)$

4

Soit A une matrice carrée à coefficient complexes. Montrer que A est conjuguée à sa transposée.

5

Soit A une matrice triangulaire supérieure, n'ayant que des 1 sur la diagonale. A quelle condition est-elle diagonalisable ?

6

Soit A la matrice carrée $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne, qui sont égaux à 1. Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$?

7

7.1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynome de degré 2, ayant deux racines a et b distinctes. soit $n \in \mathbb{N}$. Faire la division eucldienne de X^n par P.

7.2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ ayant P pour annulateur. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer f^n en fonction de n, a, b, f.

8

8.1. Soit J une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer J^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

8.2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer $P(X) = \det(X \cdot \mathrm{Id} + a \cdot J)$.

8.3. Soit D une matrice diagonale, calculer $\det(J + D)$.