Prépa CAPES UPMC 2007-2008 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 16 janvier 2008

1

On considère les formes quadratiques $q_1(x,y,z) = xy + yz + xz$, $q_2(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx$,$q_3(x,y,z,t) = xy + yz + zt + tx + xy + yt$. Pour chacune d'entre elles, donner la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée, son éventuel noyau. Trouver une base orthogonale pour q_3.

2

Soit M une matrice carrée symmétrique, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que

$$\sum_i \lambda_i^2 = \sum_{i,j} M_{i,j}^2.$$

3. Décomposition QR

Montrer que toute matrice carrée réelle M se met sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R triangulaire supérieure.

4. Inégalité de Hadamard

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ une matrice carrée à coefficients réels. Montrer que :

$$|det(A)| \leq \prod_{j=1,\dots,n} (\sum_{i=1,\dots,n} a_{i,j}^2).$$

5. Décomposition de Cholesky

Montrer que toute matrice réelle symétrique S se décompose sous la forme $S = {}^tLL$, où L est triangulaire supérieure. Cette décomposition est-elle unique ? qu'en est-il si l'on impose que les coefficients diagonaux de L sont tous positifs ?

6. Décomposition de Cholesky : exemple.

Soit S la matrice $n \times n$ dont les coefficients sont $S_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$. Observer que S est symétrique et trouver L telle que $S = {}^tLL$ (indication : commencer par les cas $n = 2$, $n = 3$, ...).

7. Décomposition Polaire

Soit $S^+(n)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives $n \times n$. Soit $\Phi : O(n) \times S^+(n) \to GL(n)$ l'application définie par $\Phi(Q,S) = QS$. Monter que Φ est une bijection (c'est en fait un difféomorphisme).

8. Décomposition de Cayley

8.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $(Id - A)$ est inversible et que $(Id + A)(Id - A)^{-1}$ est orthogonale.

8.2. Montrer toute matrice orthogonale sans valeur propre égale à -1 est de cette forme.

8.3. Quel est l'analogue de ce résultat pour les matrices unitaires ?

8.4. Dans le cas $O(2)$ et de $U(1)$, donner l'interprétation géométrique des résultats précédents.