Prépa CAPES UPMC 2007-2008 Emmanuel FERRAND, Laurent KOELBLEN.

TD d'Algèbre du mercredi 30 janvier 2008

1. Un exo qui figure noir sur blanc dans le programme du capes

« La plus grande valeur propre d'un matrice symétrique A est égale à $\sup \left\{ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX},\ X \neq 0 \right\}$. »

2. Moindres carrés

On considère p vecteurs $V_1, \ldots, V_p$ indépendants dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard. Soit G la matrice de Gramm associée : $G_{i,j} = \langle V_i | V_j \rangle$.

2.1. Montrer que G est définie positive.

2.2. Exprimer en fonction de G la distance entre un point de coordonnées $X \in \mathbb{R}^n$ et le sous-espace vectoriel F engendré par $V_1, \ldots, V_p$.

2.3. On fait aux instants $t_1, \ldots, t_N$ N mesures physiques représentées par N réels $m_1, \ldots, m_N$. On cherche une fonction affine $f : x \mapsto f(x) = ax + b$ qui approxime le mieux ces mesures au sens des moindres carrés, i.e. on cherche les deux réels a et b tels que

$$\sum_{i=1}^{N} |at_i + b - m_i|^2$$

soit le plus petit possible. Montrer que a et b existent, et donner leur expression en fonction des m_i et des t_i. Préciser cette expression dans le cas $N = 5$, $t_1 = -2, t_2 = -1, t_3 = 0, t_4 = 1, t_5 = 2$.

2.4. Même question pour une approximation par un polynôme de degré 2 : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3

On considère donc la forme bilinéaire $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$, sur $M_n(\mathbb{R})$.

3.1. Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices diagonales, en donner une base orthonormée.

3.2. Déterminer l'orthogonal de la droite des matrices scalaires. En donner une base orthonormée pour n=3.

4

(cours) Etablir la formule donnant la distance d'une droite D à un point M, la droite etant définie par un point A et un vecteur $\overrightarrow{V}$:

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}\|}{\|\overrightarrow{V}\|}.$$

Déterminer la distance entre la droite D passant par 0 et dirigée par $(1, 1, 1)$ et la droite D' d'équations $z = 0, y + x = 1$.

5

Miroir parabolique : les rayons parallèles à l'axe d'une parabole sont réfléchis en un point (le foyer). Etablir cette propriété par le calcul. (Indication : montrer qu'on peut supposer la parabole définie par l'équation $y = \frac{x^2}{2}$)

6

Soit $M = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Reconnaître la transformation de $\mathbb{R}^3$ de matrice M.

7

Montrer que l'hyperboloide de révolution à une nappe est une surface réglée (i.e. que c'est une union de droites).