TD d'Algèbre du mercredi 6 février 2008

1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère un cône de révolution V, de sommet O et d'axe Oz et un plan P ne passant pas par O. L'intersection de P et de V est une conique C.

1.1. Montrer qu'il y a en général 2 sphères S et S' qui sont à la fois :

(1) tangentes à P

(2) « coincée dans le cône V comme une boule dans un cornet de glace » (c'est à dire tangente au cône le long d'un cercle).

Quelle est la nature de la conique C en fonction de la position de S et S' par rapport au plan $z = 0$?

1.2. Dans quel cas y a-t-il une seule sphère vérifiant les propriétés (i) et (ii) ? (Décrire la position du plan P par rapport au cône V.) Quelle est la nature de la conique C dans ce cas ?

1.3. Dans le premier cas, on considère les points de contact F et F' de P avec S et S'. Montrer que F et F' sont les foyers de la conique. (Indication : Noter T le cercle de tangence entre S et V. Si M est un point de C, considérer la droite Δ du cône V passant par M, et le point N intersection de Δ avec T. Montrer que $MF = MT$. Conclure.)

1.4. Application : On considère une orange sphérique posée sur une table, éclairées par une source lumineuse ponctuelle. Montrer que l'ombre de l'orange sur la table est délimitée par une ellipse, et que le point de contact entre l'orange et la table en est l'un des foyers.

2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la sphère unité S, le point $N = (0, 0, 1)$ et le plan P d'équation $z = 0$.
À tout point M de S, différent de N, on associe le point M', intersection de P avec la droite (NM).
L'application ainsi définie $\pi : S \setminus \{N\} \to P$ s'appelle la projection stéréographique de S sur P, de centre N.

2.1. Montrer que l'image par π d'un cercle tracé sur S et passant par N est une droite de P et vice-versa.

2.2. Montrer que l'image par π d'un cercle tracé sur S et ne passant pas par N est un cercle de P et vice-versa.

3

3.1. Montrer que deux coniques se rencontrent en au maximum 4 points.
3.2. Montrer que par 5 points du plan,non aligné 3 à 3, passe une unique conique.

4. Mouvement des planètes

On considère un mouvement $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan privé de l'origine tel que les fonctions x et y soient solutions du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{-x(t)}{r(t)^3} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{-y(t)}{r(t)^3} \end{cases}$$

où $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.
On admet que cela modélise le mouvement d'un corps soumis à l'attraction du soleil. Le but de l'exercice est de montrer que les trajectoires possibles du mouvement sont des coniques.

4.1. On pose $C(t) = \det \begin{pmatrix} x(t) & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ y(t) & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$. Montrer que $C(t)$ est un fonction constante.

4.2. Montrer que la fonction $r(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{-r(t)}{r(t)^3} + G(t).$$

Exprimer la fonction $G(t)$ en fonction de $r(t)$ et de C.
4.3. Astuce de Lagrange. Montrer que la fonction $r(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (E), non homogène, à coefficients non constants, et que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions de l'équation homogène (E_0) associée.
4.4. Trouver une fonction constante solution de l'équation (E) (exprimer cette solution en fonction de C).
4.5. Montrer qu'il existe des constantes a, b et c telles que $r(t) = ax(t) + by(t) + c$. (Penser au théorème fondamental sur la structure de l'espace des solutions des équations différentielles linéaires).
4.6. En déduire que les trajectoires possibles du mouvement $t \mapsto (x(t), y(t))$ sont des coniques.