Prépa CAPES UPMC 2008-2009 Emmanuel Ferrand, Laurent Koelblen, Matthieu Romagny.

Lundi 8 décembre 2008

Polynômes

1

Effectuer la division euclidienne de $X^m - a^m$ par $X^p - a^p$ et établir une condition sur m et p pour que le reste soit nul.

2

Soit K le corps commutatif $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $K = \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}\}$.

2.1. Montrer qu'un polynôme de $K[X]$ de degré d ayant $d+1$ racines est nul.

2.2. Est-il vrai qu'un polynôme P dont la fonction polynomiale associée ($K \to K$, $x \mapsto P(x)$) est nulle est nul ?

2.3. Montrer que dans $K[X]$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{p-1}(X - \alpha_i) = X^{p-1} - 1$.

2.4. Montrer que pour tout nombre premier strictement positif p, $(p-1)! + 1$ est divisible par p.

3

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$ et $m = P(n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(n+km)$ est divisible par m. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non constant P dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ est premier.

4

Déterminer la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

5

Soient $x_i, i \in \{0, \dots, n\}$ une suite de $n+1$ réels tous distincts. On considère la famille de formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ définies par $\phi_i(P) = P(x_i)$. Montrer qu'elle forme une base de $R_n[X]^*$. Déterminer la base duale.

6

On considère la famille de polynômes $\displaystyle\binom{X}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{X-k+1}{k}$, $n \in \mathbb{R}$.

6.1. Montrer qu'il forment une base de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer la base duale (indication : considérer la forme linéaire qui à un polynôme P associe $P(1) - P(0)$.)

6.2. Soit P un polynôme prenant des valeurs entières sur tous les entiers. Montrer que P est une combinaison linéaire à coefficients entiers des polynômes $\displaystyle\binom{X}{n}$.