

Jeudi 8 janvier 2009

## Fractions rationnelles

1

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles

$$\frac{1}{(X-1)^3}, \frac{X}{X^2-1}, \frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}, \frac{1}{(X^2+X+1)^3}, \frac{X^3}{(X^2+X+1)^3}, \frac{1}{X^{2n}-1}.$$

2

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles

$$\frac{X^2}{(X+1)^3(X-1)^2}, \frac{X^n}{(X+1)^3(X-1)^2}, \frac{X^4-1}{(X-1)^4(X^2+1)^2}, \frac{X^n-1}{(X-1)^4(X^2+1)^2}, \frac{1}{(x-a)^n(x-b)^n}.$$

3

Calculer les primitives des fonctions rationnelles :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{6+4x+x^2}{(1+x)^3} & \text{(b)} \quad & \frac{3x^2-1}{x^4-2x^2+1} & \text{(c)} \quad & \frac{x^3+x^2+x+1}{(1-x)(1+x)^3} \\ \text{(d)} \quad & \frac{x}{x^2+2x+10} & \text{(e)} \quad & \frac{1}{x^4-1} & \text{(f)} \quad & \frac{1}{x^6-1} \end{aligned}$$

Calculer les intégrales et les primitives suivantes à l'aide des changements de variable indiqués :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} & t = \sqrt{1+x} & \text{(b)} \quad & \int_0^{\frac{\ln(3)}{2}} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} & t = \exp x \\ \text{(c)} \quad & \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x} & t = \exp x & \text{(d)} \quad & \int \frac{\sin 2x}{\cos 3x} dx & t = \cos x \\ \text{(e)} \quad & \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} & t = \sin x & & & \end{aligned}$$