Prépa CAPES UPMC 2008-2009 Emmanuel Ferrand, Laurent Koelblen, Matthieu Romagny.

Lundi 26 janvier 2009

Transformations affines

1

Soit E un espace affine, $t_v : E \to E$ une translation de vecteur v et $f : E \to E$ une application affine bijective. Montrer que $f \circ t_v \circ f^{-1} = t_{f(v)}$.

2

Démontrer, en utilisant une homothétie ou une translation, le théorème de Desargues : si A, B, C, A', B' et C' sont 6 points distincts du plan tels que $AB//A'B'$, $BC//B'C'$ et $CA//C'A'$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

3

Démontrer, en utilisant une homothétie ou une translation, le théorème de Pappus : si A, B, C, A', B' et C' sont 6 points distincts du plan tels que A, B, C sont alignés, A', B', C' sont alignés, $AB'//BA'$ et $BC'//CB'$, alors $CA'//AC'$.

4

Soit $ABCD$ un tétraèdre, G_1 l'isobarycentre de ABC et G_2 l'isobarycentre de BCD. Montrer à l'aide d'une projection que (G_1G_2) est parallèle à (AD).

5

Soient A, B, C trois points distincts du plan et s_A, s_B, s_C les symétries de centre A, B, C. Montrer que $s_A \circ s_B \circ s_C = s_C \circ s_B \circ s_A$ et que cette application est une symétrie de centre D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

6

Dans le plan affine, on se donne les milieux I, J, K des côtés d'un triangle ABC inconnu. Construire A, B et C à l'aide des symétries s_I, s_J et s_K.
Généraliser cette construction à un polygone ayant un nombre impair de sommets.
Que se passe-t-il pour un polygone ayant un nombre pair de sommets ?

7

Décrire le groupe des applications affines laissant invariant un parallélogramme $ABCD$ de centre O.

8

Soit E un espace affine euclidien et $f : E \to E$ une application qui conserve la distance : $\forall (A, B) \in E^2 : f(A)f(B) = AB$.

(1) Soit $A \in E$ tel que $f(A) \neq A$, et soit H l'hyperplan médiateur du segment $[A, f(A)]$. Montrer que si $f(B) = B$ alors $B \in H$.

(2) On suppose que f a des points fixes et on note F le sous-espace affine de E engendré par les points fixes de f. Montrer que si $F = E$, alors $f = \mathrm{Id}$. (Utiliser (1) et raisonner par l'absurde.)

(3) Soit A et H comme dans la question (1) et $g = s_H \circ f$. Montrer que A est un point fixe de g. Montrer que si f a des points fixes, alors $F \subsetneq G$, où F (respectivement G) est le sous-espace affine de E engendré par les points fixes de f (respectivement de g).

(4) Si f a des points fixes, on note F le sous-espace affine de E engendré par les points fixes de f, et $k = \dim F$, sinon on pose $F = \emptyset$, et $k = -1$. Montrer par récurrence sur k que f peut s'écrire comme produit d'au plus $\dim E - k$ réflexions. En déduire que f peut s'écrire comme produit d'au plus $\dim E + 1$ réflexion et que f est une application affine.

(5) On suppose que f a des points fixes et on pose F et k comme dans la question précédente. Soit p minimum tel que f puisse s'écrire comme produit de p réflexions. Montrer que $p = \dim E - k$.

9

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan euclidien sécants en A et B ($A \neq B$). Démontrer l'existence d'une rotation r_θ de centre A qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Soit $M \in \mathcal{C}$ et $M' = r_\theta(M) \in \mathcal{C}'$. Montrer que M, B et M' sont alignés.

10

Soit $M_0, \ldots, M_7$ sept points sur un cercle $\mathcal{C}$ du plan euclidien tels que

$$\forall i : 0 \leq i \leq 3 \Longrightarrow (M_i, M_{i+1}) // (M_{i+3}, M_{i+4}).$$

Montrer que $M_7 = M_0$. (Utiliser le résultat de l'exercice 5.)

11

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, orienté dans le sens direct, et P, Q, R, S les centres des quatre carrés construits sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ à l'« extérieur » du quadrilatère. Montrer que les segments $[PR]$ et $[QS]$ sont orthogonaux et ont même longueur.

12