Lundi 9 février 2009

Cercles

1

Soient A et B deux points distincts d'un plan euclidien et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[A, B]$. Montrer que $M \in \mathcal{C} \iff \widehat{AMB}$ est un angle droit.

2. Cercle d'Apollonius

Soient A et B deux points distincts d'un plan euclidien et $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \neq 0$ et $k \neq 1$. Soient C le barycentre de $(A, 1)$ et (B, k) et D le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -k)$.

(1) Montrer que $MA/MB = k \iff \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 0$.

(2) En déduire que l'ensemble des points M du plan tels que $MA/MB = k$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont le centre Ω est sur la droite (AB) et dont on précisera les coordonnées barycentriques.

3

Rappel : On considère un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

(1) Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ s'appelle l'affixe de M.

(2) Si A, B, C sont 3 points d'affixes a, b, c. L'angle $\widehat{ABC}$ est égal à l'argument de $\dfrac{c-b}{a-b}$.

(3) Quatre points A, B, C, D du plan euclidien, d'affixes a, b, c, d, sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\dfrac{c-b}{a-b} \times \dfrac{a-d}{c-d}$ est un nombre réel.

Application : Soient A et B deux points distincts du plan euclidien et $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \alpha \pmod{\pi}$ est un cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B (privé de A et B). Montrer que le centre O de $\mathcal{C}$ est situé sur la médiatrice de $[A, B]$ et que $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Préciser sur ce cercle quels sont les ensembles des points M vérifiant $\widehat{AMB} = \alpha$ d'une part, et $\widehat{AMB} = \alpha - \pi$ d'autre part.

4

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan euclidien tangent en un point I et Δ une droite tangente à $\mathcal{C}$ en A et tangente à $\mathcal{C}'$ en B avec $A \neq B$. Montrer que $\widehat{AIB}$ est un angle droit.

5

Dans un plan affine euclidien on considère un point O et trois cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ de même rayon R, passant par O. Soient A, B, C tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{O, A\}$, $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = \{O, B\}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'' = \{O, C\}$. Montrer que le cercle circonscrit à ABC est de rayon R.

6. Droite radicale de deux cercles

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles non cocycliques du plan euclidien.

(1) Montrer que l'ensemble des points du plan, qui ont la même puissance par rapport aux deux cercles, est une droite Δ.

(2) On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ne sont pas concentriques et on considère une droite tangente à $\mathcal{C}$ en A et à $\mathcal{C}'$ en A'. Montrer que le milieu de $[A, A']$ est sur Δ. En déduire une construction de Δ.

(3) Montrer que si les cercles se coupent en deux points distinct A et B, alors $\Delta = (AB)$.

(4) Montrer que si les cercles sont tangent en I, alors Δ est égale à la tangente commune en I aux deux cercles.

(5) Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont concentriques, on considère un cercle $\mathcal{C}''$ coupant $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B et $\mathcal{C}'$ en deux points distincts A' et B'. On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en I. Montrer que I appartient à Δ. En déduire une construction Δ dans ce cas.

(6) Soit $\mathcal{C}''$ un cercle orthogonal à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$. Montrer que son centre est sur Δ.

7

Soient Δ et Δ' deux droites non coplanaires et orthogonales d'un espace affine euclidien de dimension 3. On note a la distance entre ces deux droites et on fixe $k > a$. Soient $M \in \Delta$ et $M' \in \Delta'$ tels que $MM' = k$ et I le milieu de $[M, M']$. Montrer que I est sur un cercle dont on précisera le rayon et la position par rapport à Δ et Δ'. (Il sera judicieux de faire un calcul dans un repère bien choisi.)

8. Cercle d'Apollonius — suite de l'exercice 2

Soit $M \in \mathcal{C}$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$. Montrer que (MC) et (MD) sont les bissectrices de (MA) et (MB). (Indication : si a, b, c, d, z sont les affixes respectives de A, B, C, D, M on pourra remarquer que $M \in \mathcal{C} \iff \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k$. En posant $\dfrac{z-a}{z-b} = ke^{\mathrm{i}\theta}$ on pourra alors calculer les arguments de $\dfrac{z-a}{z-c}$, $\dfrac{z-c}{z-b}$, $\dfrac{z-a}{z-d}$ et $\dfrac{z-d}{z-b}$.)

9

On considère un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ soient 2 à 2 orthogonaux et de même norme R. On note A', B', C' leurs projections orthogonales sur le plan $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et a, b, c les affixes respectives de A', B', C'. Montrer que $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 2R^2$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.