Prépa CAPES UPMC 2008-2009 Emmanuel Ferrand, Laurent Koelblen, Matthieu Romagny.

Mercredi 11 février 2009

Cercles et sphères

1

Dans l'espace euclidien de dimension 3, on considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tracés sur deux plans distincts $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et sécants en deux points.

(1) Montrer qu'il existe une unique sphère $\mathcal{S}$ contenant ces deux cercles.

(2) Montrer que tout cercle $\mathcal{C}''$ tracé sur un plan $\mathcal{P}''$ différent de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et rencontrant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en deux points chacun, est tracé sur $\mathcal{S}$.

2. Projection stéréographique

On munit $\mathbb{R}^3$ du repère euclidien canonique noté $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ le plan engendré par $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\mathcal{S} = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ la sphère unité et $N \in \mathcal{S}$, de coordonnées $(1, 0, 0)$, le « pôle nord » de $\mathcal{S}$.

(1) Soit $M = (x, y, z) \in \mathcal{S}$ avec $M \neq N$. Calculer les coordonnées (X, Y) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du point P, intersection de la droite (NM) avec $\mathcal{P}$.

(2) Montrer que l'application ainsi définie, $\pi : \mathcal{S} \setminus \{N\} \to \mathcal{P}$, est une bijection. On exprimera les coordonnées (x, y, z) du point $M = \pi^{-1}(P)$ en fonction des coordonnées (X, Y) de P.

(3) Soit $\mathcal{C}$ un cercle tracé sur $\mathcal{S}$ et ne passant pas par N. $\mathcal{C}$ est égal à l'intersection de $\mathcal{S}$ avec un plan Π d'équation $ax + by + cz + d = 0$, avec $c + d \neq 0$.
Soit $M \in \mathcal{C}$ de coordonnées (x, y, z) et $P = \pi(M)$ de coordonnées (X, Y). Montrer que $X^2 + Y^2 = \dfrac{1+z}{1-z}$ et montrer que cette dernière fraction peut s'exprimer sous la forme $\alpha X + \beta Y + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

En déduire que la projection stéréographique de $\mathcal{C}$ est un cercle du plan $\mathcal{P}$.