Mercredi 18 février 2009

Coniques

1. Intersection de coniques

Montrer que deux coniques C_1 et C_2 se rencontrent en au maximum 4 points. (Si $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = 0$ sont les équations de C_1 et C_2, on pourra montrer qu'il y a au moins une conique d'équation $F_1(x, y) + tF_2(x, y) = 0$ qui est dégénérée.)

2. Mouvement des planètes

On considère un mouvement $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan privé de l'origine tel que les fonctions x et y soient solutions du système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{-x(t)}{r(t)^3} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \dfrac{-y(t)}{r(t)^3} \end{array} \right.$$

où $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.

On admet que cela modélise le mouvement d'un corps soumis à l'attraction du soleil. Le but de l'exercice est de montrer que les trajectoires possibles du mouvement sont des coniques.

2.1. On pose $C(t) = \det \begin{pmatrix} x(t) & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \\ y(t) & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \end{pmatrix}$. Montrer que $C(t)$ est un fonction constante.

2.2. Montrer que la fonction $r(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = \frac{-r(t)}{r(t)^3} + G(t).$$

Exprimer la fonction $G(t)$ en fonction de $r(t)$ et de C.

2.3. Astuce de Lagrange. Montrer que la fonction $r(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (E), non homogène, à coefficients non constants, et que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions de l'équation homogène (E_0) associée.

2.4. Trouver une fonction constante solution de l'équation (E) (exprimer cette solution en fonction de C).

2.5. Montrer qu'il existe des constantes a, b et c telles que $r(t) = ax(t) + by(t) + c$. (Penser au théorème fondamental sur la structure de l'espace des solutions des équations différentielles linéaires).

2.6. En déduire que les trajectoires possibles du mouvement $t \mapsto (x(t), y(t))$ sont des coniques.

3. Théorème de Dandelin

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère un cône de révolution V, de sommet O et d'axe Oz et un plan P ne passant pas par O et non orthogonal à Oz. L'intersection de P et de V est une conique C.

3.1. Montrer qu'il y a en général 2 sphères S et S' qui sont à la fois :

– tangentes à P
– « coincée dans le cône V comme une boule dans un cornet de glace » (c'est à dire tangente au cône le long d'un cercle).

On pourra considérer les équations suivantes :

– $V : (az)^2 = x^2 + y^2$ (avec $a > 0$),
– $P : z = bx + c$ (avec $b \neq 0$),
– $S : x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2$

et écrire les relations nécessaires pour déterminer d et R en fonction de a, b, c.

3.2. Dans quel cas y a-t-il une seule sphère vérifiant les propriétés (i) et (ii) ? (Décrire la position du plan P par rapport au cône V.)

3.3. On considère :
– F le point de contact de P avec S,
– Γ le cercle de contact de V et S,
– Π le plan contenant Γ (orthogonal à Oz),
– Δ la droite d'intersection des plans P et Π.
Soient M un point de C et :
– D la directrice du cône V passant par M,
– N le point d'intersection de D avec Γ.
Montrer que $MF = MN$. Soient alors :
– K le projeté orthogonal du point M sur le plan Π,
– H le projeté orthogonal des points M et K sur Δ.
Montrer que tous les triangles MKN ainsi obtenus sont semblables, et qu'il en est de même de tous les triangles MKH. Déduire de ce qui précède que le rapport $\dfrac{MF}{MH}$ ne dépend pas de M.

3.4. Dans le premier cas (question 3.1), on considère les points de contact F et F' de P avec S et S'. Montrer que F et F' sont les foyers de la conique.

3.5. Application : On considère un objet sphérique posée sur une table, éclairés par une source lumineuse ponctuelle. Quelle est la forme de l'ombre portée sur la table ? À quoi correspond le point de contact entre l'objet sphérique et la table ?