Lundi 12 janvier 2009

Géométrie affine

1

1.1. Dans le plan considère 3 points non alignés A, B et C. Construire le barycentre de A, B et C affectés des coefficients -1, 1, 1.

1.2. Dans le plan considère 4 points A, B, C et D non alignés 3 par 3. Construire le barycentre de A, B, C et D affectés des coefficients 1, 2, 3, 4.

2

Montrer que 2 triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité si et seulement si $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$.

3

Soit $ABCD$ un quadrilatère, I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

4

Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ 4 droites distinctes du plan, concourantes 2 à 2 et non concourantes 3 à 3. On note $P_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j$ (pour $1 \leq i < j \leq 4$), Q_1 le milieu de $[P_{12}, P_{34}]$, Q_2 celui de $[P_{13}, P_{24}]$ et Q_3 celui de $[P_{14}, P_{23}]$. Montrer que ces 3 milieux sont alignés.

5

Soit ABC un triangle non plat.

5.1. Soit Δ une droite qui coupe (BC) en P, (CA) en Q et (AB) en R. Montrer la relation de Ménélaüs : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

5.2. Montrer la réciproque : si P, Q et R sont des points respectivement situés sur les droites (BC), (CA) et (AB), et vérifiant la relation précédente, alors il sont alignés.

5.3. En déduire le théorème de Ceva : si P, Q et R sont des points respectivement situés sur les droites (BC), (CA) et (AB), alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.

6

On considère un triangle ABC et on note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques d'un point P, par rapport à A, B, C.

6.1. Montrer que, pour tout point M, on a :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2.$$

6.2. Montrer que P appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = 0.$$

6.3. Montrer que cette dernière condition est équivalente à :

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} = 0$$

où a, b, c sont les longueurs des cotés BC, AC, BC (en supposant que α, β, γ sont non nuls).

7

Étant donné un tétraèdre $ABCD$ et un plan P dans $\mathbb{R}^3$, à quelle condition la projection orthogonale $A'B'C'D'$ de $ABCD$ sur P est-elle un parallélogramme ? (Donner une condition la plus simple possible.)

8

8.1. Déterminer une équation du plan passant par $A = (-1, 1, 2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (-1, 1, 1)$.

8.2. Déterminer une équation du plan passant par $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, B, 0)$, $C = (0, 0, c)$.

9

Soit $OABC$ un tétraèdre tri-orthogonal ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux à deux orthogonaux) et soient G l'isobarycentre de ce tétraèdre et S le symétrique de O par rapport a G. Montrer que S est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

10

On considère dans le plan :
– un triangle ABC,
– les projections orthogonales A', B', C' des points A, B, C sur l'axe Ox,
– la droite Δ_A passant pas A', perpendiculaire à BC,
– la droite Δ_B passant pas B', perpendiculaire à AC,
– la droite Δ_C passant pas C', perpendiculaire à AB.
Montrer que ces 3 droites sont concourantes.