Algèbre et topologie
Master 1 — 2006
Devoir n° 1

Laurent Koelblen

On rappelle la propriété universelle de la **somme directe** de deux modules :

Soient M_1 et M_2 deux A-modules. Il existe un module noté $M_1 \oplus M_2$ et un couple d'applications linéaire $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathrm{Hom}(M_1, M_1 \oplus M_2) \times \mathrm{Hom}(M_2, M_1 \oplus M_2)$ tels que pour tout module N et tout couple d'applications linéaires $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathrm{Hom}(M_1, N) \times \mathrm{Hom}(M_2, N)$ il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, N)$ telle que $\varphi_1 = \varphi \circ \alpha_1$ et $\varphi_2 = \varphi \circ \alpha_2$, ce qui est visualisé par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
M_1 \oplus M_2 \arrow[r, dotted, "\exists!\varphi"] & N \\
M_2 \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

On notera φ sous forme matricielle : $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$.

Traiter le problème suivant à l'aide de cette propriété universelle, et sans manipuler d'élément.

1. Montrer qu'il existe deux applications linéaires uniques $\beta_1 \in \mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, M_1)$ et $\beta_2 \in \mathrm{Hom}(M_2 \oplus M_2, M_2)$ telles que $\beta_1 \circ \alpha_1 = \mathrm{Id}_{M_1}$, $\beta_1 \circ \alpha_2 = 0$, $\beta_2 \circ \alpha_1 = 0$ et $\beta_2 \circ \alpha_2 = \mathrm{Id}_{M_2}$.

2. Montrer que $\alpha_1 \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ \beta_2 = \mathrm{Id}_{M_1 \oplus M_2}$.

3. Soient Q un A-modules et $\theta_i \in \mathrm{Hom}(M_i, Q)$ $(i \in \{1,2\})$ et $\rho_i \in \mathrm{Hom}(Q, M_i)$ $(i \in \{1,2\})$ quatre applications linéaires telles que $\rho_1 \circ \theta_1 = \mathrm{Id}_{M_1}$, $\rho_1 \circ \theta_2 = 0$, $\rho_2 \circ \theta_1 = 0$, $\rho_2 \circ \theta_2 = \mathrm{Id}_{M_2}$ et $\theta_1 \circ \rho_1 + \theta_2 \circ \rho_2 = \mathrm{Id}_Q$.

   Décrire un isomorphisme naturel $M_1 \oplus M_2 \longrightarrow Q$.

4. Soient P un A-module et $(\psi_1, \psi_2) \in \mathrm{Hom}(P, M_1) \times \mathrm{Hom}(P, M_2)$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\psi \in \mathrm{Hom}(P, M_1 \oplus M_2)$ telle que $\psi_1 = \beta_1 \circ \psi$ et $\psi_2 = \beta_2 \circ \psi$, ce qui est visualisé par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \\
P \arrow[ur, "\psi_1"] \arrow[r, dotted, "\exists!\psi"] \arrow[dr, "\psi_2"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[u, "\beta_1"'] \arrow[d, "\beta_2"] \\
 & M_2
\end{tikzcd}$$

   On notera ψ sous forme matricielle : $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$.

   (Ce résultat montre que $M_1 \oplus M_2$ est isomorphe au **produit** $M_1 \times M_2$.)

5. Montrer que $\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1 \circ \psi_1 + \varphi_2 \circ \psi_2$.

6. Soient N_1, N_2 deux A-modules. On note $\gamma_j \in \mathrm{Hom}(N_j, N_1 \oplus N_2)$ et $\delta_j \in \mathrm{Hom}(N_1 \oplus N_2, N_j)$ $(j \in \{1,2\})$ les applications canoniques associées à la somme directe $N_1 \oplus N_2$.

   Soient $\varphi_{ji} \in \mathrm{Hom}(M_i, N_j)$ quatre applications linéaires $(i, j \in \{1,2\})$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2)$ telle que $\delta_j \circ \varphi \circ \alpha_i = \varphi_{ji}$ $(i, j \in \{1,2\})$, ce qui est visualisé par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rr, "\varphi_{11}"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[ddrr, "\varphi_{21}"] & & N_1 \\
M_1 \oplus M_2 \arrow[rr, dotted, "\exists!\varphi"] & & N_1 \oplus N_2 \arrow[u, "\delta_1"'] \arrow[d, "\delta_2"] \\
M_2 \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[rr, "\varphi_{22}"'] \arrow[uurr, "\varphi_{12}"'] & & N_2
\end{tikzcd}$$

   On notera φ sous forme matricielle : $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{M_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{M_2} \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{M_1 \oplus M_2}$.

8. Soient P_1, P_2 deux A-modules. et $\psi_{ik} \in \mathrm{Hom}(P_k, M_i)$ quatre applications linéaires $(i, k \in \{1,2\})$.

   Montrer que :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \circ \psi_{11} + \varphi_{12} \circ \psi_{21} & \varphi_{11} \circ \psi_{12} + \varphi_{12} \circ \psi_{22} \\ \varphi_{21} \circ \psi_{11} + \varphi_{22} \circ \psi_{21} & \varphi_{21} \circ \psi_{12} + \varphi_{22} \circ \psi_{22} \end{pmatrix}$$

   (ce qui justifie définitivement l'écriture matricielle).