

# Algèbre et topologie

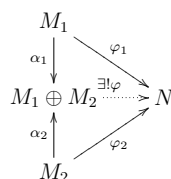
## Master 1 — 2006

### Devoir n° 1

Laurent Koelblen

On rappelle la propriété universelle de la **somme directe** de deux modules :

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux  $A$ -modules. Il existe un module noté  $M_1 \oplus M_2$  et un couple d'applications linéaire  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \text{Hom}(M_1, M_1 \oplus M_2) \times \text{Hom}(M_2, M_1 \oplus M_2)$  tels que pour tout module  $N$  et tout couple d'applications linéaires  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Hom}(M_1, N) \times \text{Hom}(M_2, N)$  il existe une unique application linéaire  $\varphi \in \text{Hom}(M_1 \oplus M_2, N)$  telle que  $\varphi_1 = \varphi \circ \alpha_1$  et  $\varphi_2 = \varphi \circ \alpha_2$ , ce qui est visualisé par le diagramme commutatif suivant :



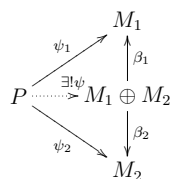
On notera  $\varphi$  sous forme matricielle :  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ .

Traiter le problème suivant à l'aide de cette propriété universelle, et sans manipuler d'élément.

1. Montrer qu'il existe deux applications linéaires uniques  $\beta_1 \in \text{Hom}(M_1 \oplus M_2, M_1)$  et  $\beta_2 \in \text{Hom}(M_1 \oplus M_2, M_2)$  telles que  $\beta_1 \circ \alpha_1 = \text{Id}_{M_1}$ ,  $\beta_1 \circ \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 \circ \alpha_1 = 0$  et  $\beta_2 \circ \alpha_2 = \text{Id}_{M_2}$ .
2. Montrer que  $\alpha_1 \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ \beta_2 = \text{Id}_{M_1 \oplus M_2}$ .
3. Soient  $Q$  un  $A$ -modules et  $\theta_i \in \text{Hom}(M_i, Q)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) et  $\rho_i \in \text{Hom}(Q, M_i)$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) quatre applications linéaires telles que  $\rho_1 \circ \theta_1 = \text{Id}_{M_1}$ ,  $\rho_1 \circ \theta_2 = 0$ ,  $\rho_2 \circ \theta_1 = 0$ ,  $\rho_2 \circ \theta_2 = \text{Id}_{M_2}$  et  $\theta_1 \circ \rho_1 + \theta_2 \circ \rho_2 = \text{Id}_Q$ .

Décrire un isomorphisme naturel  $M_1 \oplus M_2 \longrightarrow Q$ .

4. Soient  $P$  un  $A$ -module et  $(\psi_1, \psi_2) \in \text{Hom}(P, M_1) \times \text{Hom}(P, M_2)$ . Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $\psi \in \text{Hom}(P, M_1 \oplus M_2)$  telle que  $\psi_1 = \beta_1 \circ \psi$  et  $\psi_2 = \beta_2 \circ \psi$ , ce qui est visualisé par le diagramme commutatif :

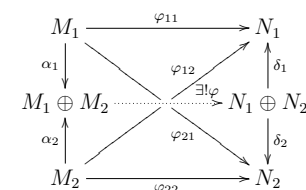


On notera  $\psi$  sous forme matricielle :  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ .

(Ce résultat montre que  $M_1 \oplus M_2$  est isomorphe au **produit**  $M_1 \times M_2$ .)

5. Montrer que  $\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \varphi_1 \circ \psi_1 + \varphi_2 \circ \psi_2$ .
6. Soient  $N_1, N_2$  deux  $A$ -modules. On note  $\gamma_j \in \text{Hom}(N_j, N_1 \oplus N_2)$  et  $\delta_j \in \text{Hom}(N_1 \oplus N_2, N_j)$  ( $j \in \{1, 2\}$ ) les applications canoniques associées à la somme directe  $N_1 \oplus N_2$ .

Soient  $\varphi_{ji} \in \text{Hom}(M_i, N_j)$  quatre applications linéaires ( $i, j \in \{1, 2\}$ ). Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $\varphi \in \text{Hom}(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2)$  telle que  $\delta_j \circ \varphi \circ \alpha_i = \varphi_{ji}$  ( $i, j \in \{1, 2\}$ ), ce qui est visualisé par le diagramme commutatif :



On notera  $\varphi$  sous forme matricielle :  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$ .

7. Montrer que  $\begin{pmatrix} \text{Id}_{M_1} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{M_2} \end{pmatrix} = \text{Id}_{M_1 \oplus M_2}$ .
8. Soient  $P_1, P_2$  deux  $A$ -modules. et  $\psi_{ik} \in \text{Hom}(P_k, M_i)$  quatre applications linéaires ( $i, k \in \{1, 2\}$ ).

Montrer que :

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \circ \psi_{11} + \varphi_{12} \circ \psi_{21} & \varphi_{11} \circ \psi_{12} + \varphi_{12} \circ \psi_{22} \\ \varphi_{21} \circ \psi_{11} + \varphi_{22} \circ \psi_{21} & \varphi_{21} \circ \psi_{12} + \varphi_{22} \circ \psi_{22} \end{pmatrix}$$

(ce qui justifie définitivement l'écriture matricielle).