Algèbre et topologie
Master 1 — 2006
Devoir n° 2

Laurent Koelblen

Les quatre premières questions n'ont pas d'autre intérêt que de rendre compréhensible la suite de l'énoncé. Leur rédaction est donc facultative. Du reste ce sont les questions suivantes qui constituent le cœur du problème...

Soit A un anneau intègre.

1. Soit $s \in A \setminus \{0\}$; on note $A_s = \left\{ \frac{a}{s^n},\ a \in A,\ n \in \mathbb{N} \right\} \Big/ \sim$, où $\frac{a}{s^n} \sim \frac{b}{s^m} \iff as^m = bs^n$.

   Vérifier rapidement que A_s et un anneau et que l'application $A \xrightarrow{\varphi_{A,s}} A_s$ définie par $\varphi_{A,s}(a) = \frac{a}{1}$ est un morphisme injectif d'anneaux.

2. Soit $s \in A \setminus \{0\}$ et soit I un idéal de A. on note $I_s = \left\{ \frac{a}{s^n},\ a \in I,\ n \in \mathbb{N} \right\} \Big/ \sim$, où $\frac{a}{s^n} \sim \frac{b}{s^m} \iff as^m = bs^n$.
   Vérifier rapidement que I_s et un idéal de A_s.

3. Soit $s \in A \setminus \{0\}$ et soit M un A-module. on note $M_s = \left\{ \frac{x}{s^n},\ x \in M,\ n \in \mathbb{N} \right\} \Big/ \sim$, où $\frac{x}{s^n} \sim \frac{y}{s^m} \iff xs^m = ys^n$.

   Vérifier rapidement que M_s et un A_s-module et que l'application $M \xrightarrow{\varphi_{M,s}} M_s$ définie par $\varphi_{M,s}(x) = \frac{x}{1}$ est un morphisme injectif de A-modules.

4. Soit $s \in A \setminus \{0\}$ et soit $M \xrightarrow{f} N$ un morphisme de A-modules.

   Vérifier rapidement que l'application $M_s \xrightarrow{f_s} N_s$ définie par $f_s\left(\frac{x}{s^n}\right) = \frac{f(x)}{s^n}$ est un morphisme de A_s-module et que le diagramme suivant de morphismes de A-modules est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\varphi_{M,s}"'] & N \arrow[d, hook, "\varphi_{N,s}"] \\ M_s \arrow[r, "f_s"'] & N_s \end{tikzcd}$$

Dans la suite du problème on considère un A-module E de type fini et des éléments $s_1, \ldots, s_k \in A \setminus \{0\}$ tels que :
- pour tout i, E_{s_i} est un A_{s_i}-module projectif,
- l'idéal engendré par $s_1, \ldots, s_k$ est égal à l'anneau A.

On veut montrer que E est projectif.

(On rappelle que E est projectif si et seulement si pour tout morphisme surjectif $M \xrightarrow{\pi} E$ il existe un morphisme $M \xleftarrow{\sigma} E$ tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$. Le morphisme σ s'appelle une section de π.)

Soit $M \xrightarrow{\pi} E$ un morphisme surjectifs de A-module.

5. Montrer qu'il existe pour tout i un morphisme de A_{s_i}-modules $M_{s_i} \xleftarrow{\sigma_{s_i}} E_{s_i}$ tels que $\pi_{s_i} \circ \sigma_{s_i} = \mathrm{Id}_{E_{s_i}}$.

6. Montrer qu'il existe pour tout i un morphisme de A-modules $M \xleftarrow{\widehat{\sigma_{s_i}}} E$ et $N_i \in \mathbb{N}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, hook, "\varphi_{M,s_i}"'] & E \arrow[l, "\widehat{\sigma_{s_i}}"'] \arrow[d, hook, "\varphi_{E,s_i}"] \\ M_{s_i} & E_{s_i} \arrow[l, "s_i^{N_i}\sigma_{s_i}"] \end{tikzcd}$$

   (Indication : E est de type fini.)

7. Montrer que $\pi \circ \widehat{\sigma_{s_i}} = s_i^{N_i}\,\mathrm{Id}_E$.
8. Montrer qu'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_k \in A$ tels que $\sum_{i=1}^{k} a_i s_i^{N_i} = 1$.
9. Conclure.

Exemple 1 :
Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{C}$ et I l'idéal de A engendré par 2 et $1 + i\sqrt{5}$.

10. Montrer que I n'est pas principal.
    (Indication : montrer que si $I = zA$ alors $|z| = 1$ ou $|z| = 2$ et conclure.)
11. Montrer que I_2 et I_3 sont des idéaux principaux de A_2 et A_3 respectivement.
    (On pourra utiliser la relation $2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$.)
12. Montrer que I est un A-module projectif non libre.
13. Décrire explicitement une section $A^2 \xleftarrow{\sigma} I$ du morphisme surjectif $A^2 \xrightarrow{\pi} I$ défini par $\pi(z_1, z_2) = -2z_1 + (1 + i\sqrt{5})z_2$.
14. Décrire explicitement une application $A^2 \xrightarrow{\rho} A$ dont le noyau est $\operatorname{im}\sigma$.
15. Soit $J = \operatorname{im}\rho$. Décrire explicitement une section $A^2 \xleftarrow{\tau} J$ du morphisme surjectif $A^2 \xrightarrow{\rho} J$ et un isomorphisme $A^2 \simeq I \oplus J$.
16. Montrer que J est un A-module projectif non libre.

Exemple 2 :
Soit $A = \mathbb{R}[X,Y]/\big(Y^2 - X^2(X+1)\big)$. On note x la classe de X dans A et y la classe de Y. Soit I l'idéal engendré par x^2 et y. (On admettra que A est intègre. On pourra si nécessaire considérer le corps $\mathbb{K}$ des fractions de A.)

17. Montrer que tout $p \in A$ s'écrit de façon unique sous la forme $p = p_0(x) + p_1(x)y$.
18. Montrer que I n'est pas principal.
19. Montrer que I_x et I_{x+1} sont des idéaux principaux de A_x et A_{x+1} respectivement.
20. Montrer que I est un A-module projectif non libre.
21. Décrire explicitement une section $A^2 \xleftarrow{\sigma} I$ du morphisme surjectif $A^2 \xrightarrow{\pi} I$ défini par $\pi(p,q) = px^2 - qy$.
22. Décrire explicitement une application $A^2 \xrightarrow{\rho} A$ dont le noyau est $\operatorname{im}\sigma$.
23. Soit $J = \operatorname{im}\rho$. Décrire explicitement une section $A^2 \xleftarrow{\tau} J$ du morphisme surjectif $A^2 \xrightarrow{\rho} J$ et un isomorphisme $A^2 \simeq I \oplus J$.
24. Montrer que J est un A-module projectif non libre.