Algèbre et topologie — Master 1 — 2006
Devoir n° 3

Laurent Koelblen

On pose $X = \mathbb{R}$ et $Y = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et on considère l'application $f : X \to Y$ définie par $f(x) = \exp(2i\pi x)$.

Soit k un corps, E un k-espace vectoriel. On note E_X le faisceau constant d'espaces vectoriels sur X à valeur dans E. C'est à dire : pour tout ouvert V de X, $E_X(V)$ est l'ensemble des fonctions localement constantes de X dans E.

Soit φ un automorphisme de E. Pour tout ouvert U de Y on pose

$$F_{E,\varphi}(U) = \big\{s \in E_X\big(f^{-1}(U)\big),\ \forall x \in X : s(x+1) = \varphi\big(s(x)\big)\big\}.$$

1. Montrer que pour tout ouvert connexe U de Y tel que $U \neq Y$ on a $(F_{E,\varphi})_{|U} \simeq E_U$.
2. Montrer que $F_{E,\varphi}$ est constant si et seulement si φ est l'identité.
3. Montrer que tout faisceau localement constant d'espaces vectoriels sur Y est isomorphe à un faisceau du type $F_{E,\varphi}$.

Soit E' un autre espace vectoriel et φ' un automorphisme de E'

4. Montrer que pour tout morphisme de faisceaux de k-espaces vectoriels $\theta : F_{E,\varphi} \to F_{E',\varphi'}$, il existe une unique application linéaire $\lambda : E \to E'$ telle que pour tout ouvert U de Y et pour tout $s \in F_{E,\varphi}(U)$ on ait $\theta(U)(s) = \lambda \circ s$ et que de plus $\varphi' \circ \lambda = \lambda \circ \varphi$.
5. Soient M et M' les matrices de φ et φ' dans des bases quelconques de E et E'. Montrer que $F_{E,\varphi}$ et $F_{E',\varphi'}$ sont isomorphes si et seulement si M et M' sont semblables.
6. (a) Montrer que $F_{E,\varphi} \oplus F_{E',\varphi'}$ et $F_{E\oplus E',\varphi\oplus\varphi'}$ sont isomorphes.
   (b) Montrer que $F_{E,\varphi} \otimes_{k_Y} F_{E',\varphi'}$ et $F_{E\otimes_k E',\varphi\otimes\varphi'}$ sont isomorphes.

On considère désormais le cas où $k = \mathbb{C}$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ on considère l'automorphisme $\varphi_{n,\alpha}$ de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$J_{n,\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

et on note $F_{n,\alpha}$ le faisceau $F_{\mathbb{C}^n,\varphi_{n,\alpha}}$.

7. Montrer que $F_{n,\alpha}$ admet une section globale si et seulement si $\alpha = 1$.

On dit qu'un faisceau localement constant de k-espaces vectoriels est irréductible s'il n'est pas isomorphe à la somme directe de deux autres (excepté la décomposition triviale $F \simeq F \oplus 0$).

8. Montrer que $F_{n,\alpha}$ est irréductible. En déduire un énoncé sur la décomposition en somme directe des faisceaux localement constants de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimensions finies sur Y.
9. Calculer la décomposition de $F_{n,\alpha} \otimes_{k_Y} F_{m,\beta}$ pour des petites valeurs de n et/ou de m. (Trouver une formule générale ?)
10. Soit $f : Y \to Y$ définie par $f(z) = z^n$. Donner la décomposition du faisceau $f_* k_Y$.