Exercice 0. ***« Lemme du serpent »***

Soit A un anneau. On considère le diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, hook, "i'"] & K \arrow[d, hook, "i"] & K'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[d, "f''"] \\
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, two heads, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & N'' \arrow[d, two heads, "\pi''"] \\
L' & L & L''
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes horizontales sont des complexes et où $K' = \ker f'$, $K = \ker f$, $K'' = \ker f''$, $L' = \operatorname{coker} f'$, $L = \operatorname{coker} f$ et $L'' = \operatorname{coker} f''$. (Les lignes verticales sont donc des suites exactes.)

(1) *Montrer qu'il existe des applications linéaires naturelles $\tilde{u} : K' \to K$, $\tilde{p} : K \to K''$, $\bar{v} : L' \to L$ et $\bar{q} : L \to L''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, hook, "i'"] & K \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, hook, "i"] & K'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, two heads, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & N'' \arrow[d, two heads, "\pi''"] \\
L' \arrow[r, "\bar{v}"] & L \arrow[r, "\bar{q}"] & L''
\end{tikzcd}$$

(2) *Montrer que $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ et que $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.*

(3) *Montrer que si u est injective alors $\tilde{u}$ l'est aussi.*
Montrer que si q est surjective alors $\bar{q}$ l'est aussi.

(4) *Montrer que si $\ker p = \operatorname{im} u$ et si v est injective alors $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.*
Montrer que si $\ker q = \operatorname{im} v$ et si p est surjective alors $\ker \bar{q} = \operatorname{im} \bar{v}$.

(5) *Montrer que si $\ker p = \operatorname{im} u$, si $\ker q = \operatorname{im} v$, si v est injective et si p est surjective alors il existe une application linéaire naturelle $\delta : K'' \to L'$.*

(6) *Sous les mêmes hypothèses, montrer que $\ker \delta = \operatorname{im} \tilde{p}$ et $\ker \bar{v} = \operatorname{im} \delta$.*

Il est d'usage de rassembler ces énoncés dans le suivant : on considère le diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & K' \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[d, "i"'] & K'' \arrow[d, "i''"'] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
 & L' \arrow[d] & L \arrow[d] & L'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes horizontales et verticales sont des suites exactes ; on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé « diagramme du serpent » :

tracé comme ceci

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "i"'] & K'' \arrow[d, "i''"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
 & L' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d] & L \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ou comme cela

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "i'"'] & K \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "i"'] & K'' \arrow[d, "i''"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
 & L' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d] & L \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & L'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\tilde{u}} K \xrightarrow{\tilde{p}} K'' \xrightarrow{\delta} L' \xrightarrow{\bar{v}} L \xrightarrow{\bar{q}} L'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

Solution :

(1) Soit $x \in K'$; on a $f \circ u \circ i'(x) = v \circ f' \circ i'(x) = 0$ (car $f' \circ i' = 0$) ; donc $u \circ i'(x) \in \ker f = K$. Ainsi $\tilde{u} = u_{|K'}$ est à valeur dans K.

On montre de même que $\tilde{p} = p_{|K}$ est à valeur dans K''.

Soit maintenant $x \in L'$; comme π' est surjective, il existe $y \in N'$ tel que $x = \pi'(y)$; posons $z = \pi \circ v(y)$; considérons alors un autre antécédant de x par π' : $y' \in N'$ tel que $x = \pi'(y')$ et posons $z' = \pi \circ v(y')$; on remarque que $y - y' \in \ker \pi' = \operatorname{im} f'$ donc il existe $t \in M'$ tel que $y - y' = f'(t)$; mais alors $z - z' = \pi \circ v(y - y') = \pi \circ v \circ f'(t) = \pi \circ f \circ u(t) = 0$ (car $\pi \circ f = 0$) ; il en découle que z ne dépend que de x et pas de l'antécédant y choisi pour le calculer ; on peut donc poser $z = \bar{v}(x)$. On vérifie aisément que $\bar{v}$ ainsi défini est une application linéaire : soient $a_1, a_2 \in A$ et $x_1, x_2 \in L'$ et soient $y_1, y_2 \in N'$ tels que $x_1 = \pi'(y_1)$ et $x_2 = \pi'(y_2)$; on a alors $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \pi'(a_1 y_1 + a_2 y_2)$ donc $\bar{v}(a_1 x_1 + a_2 x_2) = \pi \circ v(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1\ \pi \circ v(y_1) + a_2\ \pi \circ v(y_2) = a_1 \bar{v}(x_1) + a_2 \bar{v}(x_2)$.

On construit de même $\bar{q} : L \to L''$.

(2) Soit $x \in K'$; on a $i'' \circ \tilde{p} \circ \tilde{u}(x) = p \circ u \circ i'(x) = 0$ (car $p \circ u = 0$) ; or i'' est injective donc $\tilde{p} \circ \tilde{u}(x) = 0$. Conclusion : $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$.

Soit maintenant $x \in L'$ et $y \in N'$ tel que $x = \pi'(y)$; on a alors $\bar{q} \circ \bar{v}(x) = \bar{q} \circ \bar{v} \circ \pi'(y) = \pi'' \circ q \circ v(y) = 0$ (car $q \circ v = 0$). Conclusion : $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.

(3) Par définition $\tilde{u} = u_{|K'}$ donc si u est injective alors $\tilde{u}$ l'est aussi.

Par construction $\operatorname{im} \bar{q} = \operatorname{im} \pi'' \circ q$; par définition π'' est surjective donc si q l'est aussi, il en est alors de même pour $\bar{q}$.

(4) Supposons $\ker p = \operatorname{im} u$ et v injective ; soit $x \in \ker \tilde{p} \subset K$; on a $p \circ i(x) = i'' \circ \tilde{p}(x) = 0$ donc $i(x) \in \ker p = \operatorname{im} u$; il existe donc $y \in M'$ tel que $i(x) = u(y)$ et on a $v \circ f'(y) = f \circ u(y) =$

$f \circ i(x) = 0$ (car $f \circ i = 0$) donc $f'(y) = 0$ (car v est injective) d'où $y \in \ker f' = \operatorname{im} i'$; il existe donc $z \in K'$ tel que $y = i'(z)$ et alors $i \circ \tilde{u}(z) = u \circ i'(z) = u(y) = i(x)$ donc $u(z) = x$ (car i est injective). Conclusion : $\ker \tilde{p} \subset \operatorname{im} \tilde{u}$; l'inclusion inverse provient de la relation $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ d'où l'égalité : $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.

Supposons maintenant $\ker q = \operatorname{im} v$ et p surjective ; soit $x \in \ker \bar{q} \subset L$; il existe $y \in N$ tel que $x = \pi(y)$ (car π est surjective) ; on a alors $\pi'' \circ q(y) = \bar{q} \circ \pi(y) = \bar{q}(x) = 0$ donc $q(y) \in \ker \pi'' = \operatorname{im} f''$ donc il existe $z \in M''$ tel que $q(y) = f''(z)$; comme p est surjective il existe $t \in M$ tel que $z = p(t)$ d'où $q(y) = f'' \circ p(t) = q \circ f(t)$; mais alors $q(y - f(t)) = 0$ donc $y - f(t) \in \ker q = \operatorname{im} v$ donc il existe $s \in N'$ tel que $y - f(t) = v(s)$ c'est à dire $y = f(t) + v(s)$; on a alors $x = \pi(y) = \pi(f(t) + v(s)) = \pi \circ v(s)$ (car $\pi \circ f = 0$) donc $x = \bar{v} \circ \pi'(s)$. Conclusion $\ker \bar{q} \subset \operatorname{im} \bar{v}$; l'inclusion inverse provient de la relation $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$ d'où l'égalité : $\ker \bar{q} = \operatorname{im} \bar{v}$.

(5) Supposons $\ker p = \operatorname{im} u$, p surjective, $\ker q = \operatorname{im} v$ et v injective ; soit $x \in K''$; il existe $y \in M$ tel que $p(y) = i''(x)$ (car p est surjective) ; on a alors $q \circ f(y) = f'' \circ p(y) = f'' \circ i''(x) = 0$ (car $f'' \circ i'' = 0$) c'est à dire $f(y) \in \ker q = \operatorname{im} v$; donc il existe $z \in N''$ tel que $f(y) = v(z)$ (z est unique car v est injective) ; posons $t = \pi'(z)$; considérons alors un autre antécédent de $i''(x)$ par p : $y' \in M$ tel que $p(y') = i''(x)$, et considérons aussi $z' \in N'$ tel que $v(z') = f(y')$; on remarque que $y - y' \in \ker p = \operatorname{im} u$ donc il existe $s \in M'$ tel que $y - y' = u(s)$ et alors $v \circ f'(s) = f \circ u(s) = f(y) - f(y') = v(z) - v(z')$ donc $f'(s) = z - z'$ (car v est injective) ; il en résulte que $t = \pi'(z) = \pi'(z' + f'(s)) = \pi'(z')$ (car $\pi' \circ f' = 0$) ce qui montre que t ne dépend que de x et pas du choix de y ; on peut donc poser $\delta(x) = t$; on vérifie aisément que δ ainsi définie est une application linéaire (s'inspirer de la démonstration faite en (1) pour $\bar{v}$) ;

(6) Soit $x = \tilde{p}(w)$; on reprend la construction de $\delta(x)$: on peut prendre $y = i(w)$ car on a bien $p(y) = p \circ i(w) = i'' \circ \tilde{p}(w) = i''(x)$; mais alors $f(y) = f \circ i(w) = 0$ (car $f \circ i = 0$) donc $z = 0$ et $t = \delta(x) = \pi'(z) = 0$; conclusion : $\delta \circ \tilde{p} = 0$ ou encore $\operatorname{im} \tilde{p} \subset \ker \delta$.

Soit maintenant $x \in \ker \delta \subset K''$; en reprenant les notations de la construction de $\delta(x)$ cela signifie que $t = \pi'(z) = 0$ donc $z \in \ker \pi' = \operatorname{im} f'$; donc il existe $r \in M'$ tel que $z = f'(r)$ et alors $f \circ u(r) = v \circ f'(r) = v(z) = f(y)$ d'où $y - u(r) \in \ker f = \operatorname{im} i$; donc il existe $w \in K$ tel que $y - u(r) = i(w)$ et alors $i'' \circ \tilde{p}(w) = p \circ i(w) = p(y - u(r)) = p(y)$ (car $p \circ u = 0$) d'où $i'' \circ \tilde{p}(w) = i''(x)$ et donc $p(w) = x$ (car i'' est injective) ; conclusion : $\ker \delta \subset \operatorname{im} \tilde{p}$.

Ceci montre l'égalité $\ker \delta = \operatorname{im} \tilde{p}$.

D'autre part, toujours à l'aide de la construction de $\delta(x)$, on a $\bar{v} \circ \delta(x) = \bar{v} \circ \pi'(z) = \pi \circ v(z) = \pi \circ f(y) = 0$ (car $\pi \circ f = 0$) ; conclusion : $\bar{v} \circ \delta = 0$ ou encore $\operatorname{im} \delta \subset \ker \bar{v}$.

Soit maintenant $t \in \ker \bar{v} \subset L'$ et soit $z \in N'$ tel que $t = \pi'(z)$ (z existe car π' est surjective) ; on a $\pi \circ v(z) = \bar{v} \circ \pi'(z) = \bar{v}(t) = 0$ donc $v(z) \in \ker \pi = \operatorname{im} f$; donc il existe $y \in M$ tel que $v(z) = f(y)$; on a alors $f'' \circ p(y) = q \circ f(y) = q \circ v(z) = 0$ (car $q \circ v = 0$) d'où $p(y) \in \ker f'' = \operatorname{im} i''$; donc il existe $x \in K''$ tel que $p(y) = i''(x)$ et par cette construction on a $\delta(x) = t$; conclusion : $\ker \bar{v} \subset \operatorname{im} \delta$.

Ceci montre l'égalité $\ker \bar{v} = \operatorname{im} \delta$.