Exercice 1. *Soit A un anneau et $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M''$ une suite exacte de A-modules.*

(1) Soient $N \subset P$ deux sous-modules de M, tels que $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$. Montrer que $N = P$.

(2) Donner un exemple où $i^{-1}(N) = i^{-1}(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$ mais tel que $N \neq P$ (suggestion : prendre $M = \mathbb{R}^2$ et $M' = M'' = \mathbb{R}$).

Solution :

(1) Soit $x \in P$: $\pi(x) \in \pi(P) = \pi(N)$ donc il existe $y \in N$ tel que $\pi(y) = \pi(x)$ et alors $x - y \in \ker(\pi) = \mathrm{im}(i)$. Il existe donc $z \in M'$ tel que $x - y = i(z)$. Comme $x - y \in P$ on a : $z \in i^{-1}(P) = i^{-1}(N)$ d'où $x = y + i(z) \in N$. Conclusion : $P \subset N$.

(2) Considérons la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \longrightarrow 0$ dans laquelle $i(x) = (x, 0)$ et $\pi(x, y) = y$; prenons deux sous-espaces vectoriels de dimension 1 : $N = \big\langle (a, b) \big\rangle$ et $P = \big\langle (c, d) \big\rangle$ avec $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On a alors $i^{-1}(N) = i^{-1}(P) = (0)$, $\pi(N) = \pi(P) = \mathbb{R}$, $N \not\subset P$ et $P \not\subset N$.

Autre solution :

(1) La suite $i^{-1}(N) \xrightarrow{i_{|i^{-1}(N)}} N \xrightarrow{\pi_{|N}} \pi(N) \longrightarrow 0$ est exacte : la surjectivité de $N \xrightarrow{\pi_{|N}} \pi(N)$ est évidente ; de plus $\ker \pi_{|N} = \ker \pi \cap N = \mathrm{im}\, i \cap N = \mathrm{im}\, i_{|i^{-1}(N)}$. On a aussi la même suite exacte avec P.

À partir d'ici on ne manipule plus d'éléments de N ou P.

On a donc le diagramme commutatif suivant dans lequel toutes les lignes verticales et les deux premières lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
i^{-1}(N) \arrow[r, "i_{|i^{-1}(N)}"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "\pi_{|N}"] \arrow[d, hook] & \pi(N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
i^{-1}(P) \arrow[r, "i_{|i^{-1}(P)}"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi_{|P}"] \arrow[d] & \pi(P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dotted] & P/N \arrow[r, dotted] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On conclut au fait que $P/N \simeq 0$, c'est à dire $N = P$, grâce à l'exactitude de la dernière ligne, $0 \longrightarrow P/N \longrightarrow 0$, qui est un des résultats du lemme du serpent.