Exercice 2. *Soit A un anneau, M un A-module et N et P des sous-modules de M.*
Soit $f : N \cap P \longrightarrow N \oplus P$, $x \longmapsto (x, x)$ et $g : N \oplus P \longrightarrow N + P$, $(y, z) \longmapsto y - z$.

(1) Montrer que la suite $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{f} N \oplus P \xrightarrow{g} N + P \longrightarrow 0$ est exacte.

(2) On choisit $A = k[X, Y]$, où k est un corps, $M = A$, $N = XA$ (c'est a dire le sous-module de $k[X, Y]$ formé des polynômes multiples de X) et $P = Y A$. Montrer que dans ce cas la suite exacte qui précède n'est pas scindée.

(3) Établir l'existence d'une suite exacte $0 \longrightarrow \dfrac{M}{N \cap P} \xrightarrow{\tilde{f}} \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \xrightarrow{\tilde{g}} \dfrac{M}{N + P} \longrightarrow 0$.

Solution :

(1) Toutes les propriétés sont immédiates :

— f est injective : si $f(x) = (x, x) = (0, 0)$ alors $x = 0$,
— g est surjective, par définition de $N + P$,
— $g \circ f = 0$, par définiton de f et g,
— Si $g(y, z) = 0$ alors $y = z \in N \cap P$ donc $(y, z) \in \mathrm{im}(f)$.

(2) Si $N = XA$ et $P = Y A$ alors $N \cap P = (XY)A$ (les multiples de XY) et $N + P = (X, Y)A = \{Q \in A,\ Q = UX + V Y$ avec $U \in A$ et $V \in A\}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite exacte est scindée ; il existe alors une application $s : (X, Y)A \to XA \oplus Y A$ telle que $g \circ s = \mathrm{Id}_{(X,Y)A}$. On a alors :

— $s(X) = (XP_1, Y P_2)$ avec $X = Y P_2 - XP_1$ c'est à dire $X(1+P_1) = Y P_2$ mais comme A est factoriel et X et Y des éléments irréductibles distincts de A on en déduit que $X|P_2$ (c'est le lemme de Gauß), donc $P_2 = XP_0$ et alors $P_1 = Y P_0 - 1$ d'où $s(X) = (XY P_0 - X, XY P_0)$.
— de même on trouve $s(Y) = (XYQ_0, XYQ_0 + Y)$

De plus comme $s(XY) = Xs(Y)$ (car s est un morphisme de A-modules) on trouve $s(XY) = (X^2YQ_0, X^2YQ_0 + XY)$ et aussi $s(XY) = Y s(X) = (XY^2P_0 - XY, XY^2P_0)$. Ce qui nous donne $X^2YQ_0 = XY^2P_0 - XY$ donc $XY = XY^2P_0 - X^2YQ_0$ d'où $1 = Y P_0 - XQ_0$ ce qui est impossible (dans k[X,Y]).

(3) Prendre $\tilde{f}(x + N \cap P) = (x + N, x + P)$ et $\tilde{g}(y + N, z + P) = z - y + (N + P)$.
($x+Q$ désigne la classe de x dans M/Q.) L'exactitude de la suite se montre comme en (1).

Autre solution :

(3) On part du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \cap P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \oplus P \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N + P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \oplus M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \dfrac{M}{N \cap P} \arrow[d] & \dfrac{M}{N} \oplus \dfrac{M}{P} \arrow[d] & \dfrac{M}{N + P} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne immédiatement l'existence et l'exactitude de la suite cherchée.