Exercice 3. *Soit A un anneau.*

(1) Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel entre M'' et $\dfrac{M}{i(M')}$.

(2) Soit M un A-module et N et P des sous-modules de M. Établir un isomorphisme $\dfrac{N}{N \cap P} \longrightarrow \dfrac{N+P}{P}$ (on pourra considérer le morphisme $\pi : N \longrightarrow \dfrac{N+P}{P}$, $x \longmapsto x+P$).

(3) Soit I un idéal de A. On pose $IM = \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i m_i,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i : a_i \in I \text{ et } m_i \in M \right\}$. Montrer que IM est un sous-module de M.

(4) Montrer que $\dfrac{IN+P}{P} = I\dfrac{N+P}{P}$.

Solution :

(1) On peut définir $\varphi : M/i(M') \longrightarrow M''$ en posant $\varphi(x + i(M')) = \pi(x)$ (où $x + i(M')$ désigne la classe de x dans $M/i(M')$) car si $x + i(M') = y + i(M')$ alors $x - y \in i(M')$ et $\pi(x) = \pi(y)$. Il suffit de vérifier que φ est un isomorphisme :

— Si $\varphi(x+i(M')) = 0$ alors $\pi(x) = 0$ donc $x \in \ker \pi = i(M')$ donc $x+i(M') = 0+i(M')$; φ est donc injective.

— Soit $z \in M''$; il existe $x \in M$ tel que $\pi(x) = z$ et on a alors $\varphi(x + i(M')) = z$; ce qui montre que φ est surjective.

(2) Soit $\pi : N \longrightarrow \dfrac{N+P}{P}$, $x \longmapsto x + P$. Le noyau de π est $N \cap P$. On a donc une suite exacte $0 \longrightarrow N \cap P \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} \dfrac{N+P}{P} \longrightarrow 0$ d'où, d'après (1), $\dfrac{N}{N \cap P} \simeq \dfrac{N+P}{P}$.

(3) IM est stable par addition (évident) et par multiplication par un élément de A (car I l'est), donc c'est un sous-module de M.

(4)
$$\begin{aligned} I\frac{N+P}{P} &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + P),\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i : a_i \in I \text{ et } x_i \in N \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) + P,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i : a_i \in I \text{ et } x_i \in N \right\} = \frac{IM+P}{P}. \end{aligned}$$