Exercice 4. *(Lemme des 5) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5 \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

Remarquons que ce lemme est utilisé souvent de la manière suivante :

(3) Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Solution :

(1) Soit $x_3 \in M_3$; si $f_3(x_3) = 0$ alors $f_4(\alpha_3(x_3)) = \beta_3(f_3(x_3)) = 0$ donc $\alpha_3(x_3) = 0$ car f_4 est injective. Comme les lignes horizontales sont des suites exactes, il existe $x_2 \in M_2$ tel que $x_3 = \alpha_2(x_2)$. Soit $y_2 = f_2(x_2)$; on a $\beta_2(y_2) = f_3(x_3) = 0$ donc il existe $y_1 \in N_1$ tel que $f_2(x_2) = \beta_1(y_1)$. Comme f_1 est surjective, il existe $x_1 \in M_1$ est que $y_1 = f_1(x_1)$. On a alors : $x_3 = \alpha_2(x_2 - \alpha_1(x_1))$ (car $\alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$) mais $f_2(x_2 - \alpha_1(x_1)) = f_2(x_2) - f_2(\alpha_1(x_1)) = y_2 - \beta_1(f_1(x_1)) = 0$ donc $x_2 - \alpha_1(x_1) = 0$, car f_2 est injective, et $x_3 = 0$. Conclusion : f_3 est injective.

(2) Soit $y_3 \in N_3$; il existe $x_4 \in M_4$ tel que $f_4(x_4) = \beta_3(x_3)$ car f_4 est surjective. On a $f_5(\alpha_4(x_4)) = \beta_4(f_4(x_4)) = \beta_4(\beta_3(y_3)) = 0$ donc $\alpha_4(x_4) = 0$ car f_5 est injective. Comme les lignes horizontales sont des suites exactes, il existe $x_3 \in M_3$ tel que $\alpha_3(x_3) = x_4$. On a alors : $\beta_3(y_3 - f_3(x_3)) = 0$ donc il existe $y_2 \in N_2$ tel que $y_3 - f_3(x_3) = \beta_2(y_2)$. Comme f_2 est surjective, il existe $x_2 \in M_2$ tel que $f_2(x_2) = y_2$. On a alors $y_3 = f_3(x_3 + \alpha_2(x_2))$. Conclusion : f_3 est surjective.