Exercice 5. *(Lemme des 9) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :*

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
 & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g'"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & N'' \arrow[d, "g''"'] & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\gamma'"] & L \arrow[r, "\gamma"] & L'' &
\end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les lignes sont des suites exactes ainsi que la colonne droite et la colonne gauche. Montrer que si de plus la colonne du milieu est un complexe, alors c'est une suite exacte.

Solution :
Soit $y \in N$ tel que $g(y) = 0$; alors $g''(\beta(y)) = \gamma(g(y)) = 0$ donc il existe $x'' \in M''$ tel que $f''(x'') = \beta(y)$. Il existe aussi $x \in M$ tel que $\alpha(x) = x''$, car α est surjective, et on a alors $\beta(y - f(x)) = 0$ donc il existe $y' \in N'$ tel que $y - f(x) = \beta'(y')$. On a alors $\gamma'(g'(y')) = g(\beta'(y')) = g(y - f(x)) = 0$ donc $g'(y') = 0$ car γ' est injective. Il existe donc $x' \in M'$ tel que $y' = f'(x')$ et alors $y = f(x + \alpha'(x'))$.