Exercice 6. *Soient $f_1 : M_1 \to N$ et $f_2 : M_2 \to N$ deux applications A-linéaires. Un A-module P, équipé de deux applications A-linéaires $p_1 : P \to M_1$ et $p_2 : P \to M_2$ telles que $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$, est appelé produit fibré de f_1 et f_2 si pour tout couple d'applications A-linéaires $h_1 : L \to M_1$ et $h_2 : L \to M_2$ tel que $f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$, il existe une unique application A-linéaire $h : L \to P$ telle que $p_1 \circ h = h_1$ et $p_2 \circ h = h_2$, ce qui est visualisé dans le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, dotted, "\exists ! h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& M_1 \arrow[r, "f_1"'] & N.
\end{tikzcd}$$

(1) Montrer par une construction explicite que le produit fibré existe et qu'il est unique à isomorphisme près.

(2) Construire le produit fibré à l'aide de produits et de noyaux (utiliser les propriétés universelles).

Solution :

(1) Prenons $P = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2,\ \text{tel que } f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$ et p_1 et p_2 les projections naturelles. Soit alors L, h_1 et h_2 comme dans le diagramme ; pour définir $h : L \to P$ tel que $p_1 \circ h = h_1$ et $p_2 \circ h = h_2$ il faut prendre $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$ et alors on a bien $h(x) \in P$ car $f_1(h_1(x)) = f_2(h_2(x))$. Ceci établit l'existence d'un objet P vérifiant la propriété universelle.
Pour démontrer l'unicité on remarque tout d'abord que si $L = P$ la propriété universelle montre que h est nécessairement l'identité.
Ensuite si l'on a deux objets universels P et P' donnant lieu à un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, bend left, "h"] \arrow[drr, bend left, "p'_2"] \arrow[ddr, bend right, "p'_1"'] & & \\
& P \arrow[ul, bend left, "h'"] \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& M_1 \arrow[r, "f_1"'] & N.
\end{tikzcd}$$

alors d'après la remarque précédente on a $h \circ h' = \mathrm{Id}_P$ et $h' \circ h = \mathrm{Id}_{P'}$ donc P et P' sont isomorphes.

(2) Soit $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ et $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ les projections naturelles. Prendre $P = \ker(f_1 \circ \pi_1 - f_2 \circ \pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow N)$.