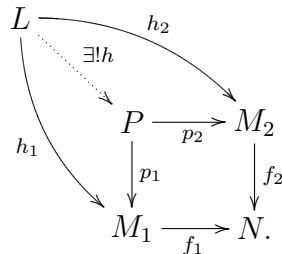


**Exercice 6.** Soient  $f_1 : M_1 \rightarrow N$  et  $f_2 : M_2 \rightarrow N$  deux applications  $A$ -linéaires. Un  $A$ -module  $P$ , équipé de deux applications  $A$ -linéaires  $p_1 : P \rightarrow M_1$  et  $p_2 : P \rightarrow M_2$  telles que  $f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$ , est appelé produit fibré de  $f_1$  et  $f_2$  si pour tout couple d'applications  $A$ -linéaires  $h_1 : L \rightarrow M_1$  et  $h_2 : L \rightarrow M_2$  tel que  $f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$ , il existe une unique application  $A$ -linéaire  $h : L \rightarrow P$  telle que  $p_1 \circ h = h_1$  et  $p_2 \circ h = h_2$ , ce qui est visualisé dans le diagramme commutatif :



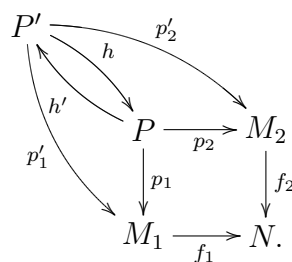
- (1) Montrer par une construction explicite que le produit fibré existe et qu'il est unique à isomorphisme près.
- (2) Construire le produit fibré à l'aide de produits et de noyaux (utiliser les propriétés universelles).

**Solution :**

- (1) Prenons  $P = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2, \text{ tel que } f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$  et  $p_1$  et  $p_2$  les projections naturelles. Soit alors  $L, h_1$  et  $h_2$  comme dans le diagramme ; pour définir  $h : L \rightarrow P$  tel que  $p_1 \circ h = h_1$  et  $p_2 \circ h = h_2$  il faut prendre  $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$  et alors on a bien  $h(x) \in P$  car  $f_1(h_1(x)) = f_2(h_2(x))$ . Ceci établit l'existence d'un objet  $P$  vérifiant la propriété universelle.

Pour démontrer l'unicité on remarque tout d'abord que si  $L = P$  la propriété universelle montre que  $h$  est nécessairement l'identité.

Ensuite si l'on a deux objets universels  $P$  et  $P'$  donnant lieu à un diagramme commutatif :



alors d'après la remarque précédente on a  $h \circ h' = \text{Id}_P$  et  $h' \circ h = \text{Id}_{P'}$  donc  $P$  et  $P'$  sont isomorphes.

- (2) Soit  $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$  et  $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$  les projections naturelles. Prendre  $P = \ker(f_1 \circ \pi_1 - f_2 \circ \pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N)$ .