Exercice 7. *Soit A un anneau commutatif.*

(1) Prouver que $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$.(Utiliser la suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$)

(2) Prouver que $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I+J)$.

Solution :

(1) On tensorise la suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ par M : on obtient la suite exacte $I \otimes M \xrightarrow{i} A \otimes M \to A/I \otimes M \to 0$; mais l'application $f : A \otimes M \to M$ définie par $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ est un isomorphisme ainsi l'image de $f \circ i$ est IM et on a une suite exacte $0 \to IM \to M \to A/I \otimes M \to 0$ d'où l'isomorphisme $A/I \otimes_A M \simeq M/IM$ d'après l'exercice 3 question (1).

(2) D'après (1) $A/I \otimes_A A/J \simeq \dfrac{A/J}{I(A/J)}$ qui est isomorphe à $\dfrac{A/J}{(I+J)/J}$ d'après l'exercice 3, question (4) ; or on a une suite exacte $0 \to N/P \to M/P \to M/N \to 0$ pour tout A-modules $P \subset N \subset M$, d'où l'isomorphisme $M/N \simeq \dfrac{M/P}{N/P}$. Ainsi $\dfrac{A/J}{(I+J)/J} \simeq A/(I+J)$ ce qu'il fallait démontrer.