Exercice 9. *Soient A un anneau commutatif, M un A-module plat, N un A-module et N_1 et N_2 deux sous-modules de N.*

(1) Montrer que $N_i \otimes M$ est canoniquement isomorphe à un sous-module de $N \otimes M$.

Dans la suite de l'exercice nous confondrons $N_i \otimes M$ avec le sous-module correspondant de $N \otimes M$.

(2) Montrer qu'on a $(N_1 \cap N_2) \otimes M = (N_1 \otimes M) \cap (N_2 \otimes M)$. (C'est une égalité entre deux sous-modules de $N \otimes_A M$. On pourra considérer une suite exacte $0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \longrightarrow N_1 \oplus N_2 \longrightarrow N_1 + N_2 \longrightarrow 0$ et la tensoriser par M.)

(3) Soit B un anneau commutatif et $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. L'opération externe $A \times B \to B$ définie par $(a,b) \mapsto a.b = f(a)b$ munit B d'une structure de A-module. On suppose que B, considéré comme A-module, est plat sur A.
Soient I_1 et I_2 deux idéaux de A. Montrer que $I_i \otimes_A B$ est canoniquement isomorphe à I_iB qui est l'idéal de B engendré par $f(I_i)$. En déduire que $(I_1 \cap I_2)B = I_1B \cap I_2B$.

Solution :

(1) Si $N_i \overset{j}{\hookrightarrow} N$, alors $j \otimes \mathrm{Id}_M : N_i \otimes M \to N \otimes M$ est injective car M est plat. $N_i \otimes M$ est donc canoniquement isomorphe à un sous-module de $N \otimes M$.

(2) — L'inclusion $(N_1 \cap N_2) \otimes M \subset (N_1 \otimes M) \cap (N_2 \otimes M)$ peut être vérifiée simplement : soit $\omega \in (N_1 \cap N_2) \otimes M$; on peut écrire $\omega = \sum_i x_I \otimes y_i$ avec pour tout i : $x_i \in N_1 \cap N_2$ et $y_i \in M$. Il est alors clair que $\omega \in N_1 \otimes M$ et $\omega \in N_2 \otimes M$.

— L'inclusion inverse est beaucoup plus délicate : si $\omega \in (N_1 \otimes M) \cap (N_2 \otimes M)$ alors on peut écrire $\omega = \sum_i x_{1,i} \otimes y_{1,i} = \sum_j x_{2,j} \otimes y_{2,j}$ avec pour tout i : $x_{1,i} \in N_1$, $y_{1,i} \in M$ et pour tout j : $x_{2,j} \in N_2$, $y_{2,j} \in M$. Mais on est bien en peine d'idée pour tirer quoi que ce soit de ces deux écritures possibles de ω.

— On procède donc différemment en introduisant la suite exacte

$$0 \to N_1 \cap N_2 \to N_1 \oplus N_2 \to N_1 + N_2 \to 0$$

(construite comme dans l'exercice 2)

On reporte ainsi le problème de la distributivité de $\cap$ par rapport à $\otimes$ sur celui, plus facile, de la distributivité de $+$ et $\oplus$ par rapport $\otimes$. En effet; on remarque que :

$$(N_1 + N_2) \otimes M = (N_1 \otimes M) + (N_2 \otimes M)$$

(Il s'agit ici de la somme de 2 sous-modules, pas de la somme directe. Cette égalité est évidente.), et on sait déjà que :

$$(N_1 \oplus N_2) \otimes M = (N_1 \otimes M) \oplus (N_2 \otimes M)$$

À partir de la première suite exacte on construit la suite :

$$0 \to (N_1 \cap N_2) \otimes M \to (N_1 \oplus N_2) \otimes M \to (N_1 + N_2) \otimes M \to 0$$

qui est exacte car M est plat. (Voilà où intervient l'hypothèse de platitude.) On peut substituer les deuxième et troisième terme de cette suite pour obtenir :

$$0 \to (N_1 \cap N_2) \otimes M \to (N_1 \otimes M) \oplus (N_2 \otimes M) \to (N_1 \otimes M) + (N_2 \otimes M) \to 0$$

Par analogie avec la première suite exacte on sait que le premier terme n'est autre que le sous-module de $N \otimes M$:

$$(N_1 \otimes M) \cap (N_2 \otimes M),$$

ce qu'il fallait démontrer. (Remarque : pour être rigoureux, il faudrait décrire tous les morphismes intervenant dans les suites exacte.)

(3) On rappelle que la structure de A-module sur B est donnée par $a.b = f(a)b$.

Considérons l'injection $I_i \hookrightarrow A$ de laquelle on déduit une injection $I_i \otimes_A B \hookrightarrow A \otimes_A B$ (car B est un A-module plat). On connait déjà l'isomorphisme $A \otimes_A B \tilde{\to} B$ défini par $\sum_j a_j \otimes b_j \mapsto \sum_j a_j.b_j = \sum_j f(a_j)b_j$ et on voit immédiatement que l'image de $I_i \otimes_A B$ dans B n'est autre que I_iB, d'où l'isomorphisme canonique $I_i \otimes_A B \tilde{\to} I_iB$ (défini également par $\sum_j a_j \otimes b_j \mapsto \sum_j f(a_j)b_j$).

L'égalité $(I_1 \cap I_2)B = I_1B \cap I_2B$ résulte alors de la question (2).