Exercice 10. *Soient M un A-module plat et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs (qui muni B d'une structure de A-module). Montrer que $B \otimes_A M$ est plat sur B.*

Solution : Remarquons tout d'abord que :

— B est muni d'une structure de A-module donnée par $a.b = f(a)b$.

— Tout B-module N a aussi une structure de A-module donnée par $a.x = f(a).x$.

— $B \otimes_A M$ est muni d'une structure de B-module donnée par $b.(b' \otimes y) = bb' \otimes y$.

Soit N un B-module. Grâce aux propriétés qui précèdent, on peut donc construire les morphismes de A-modules suivants :

— $\varphi\ : N \otimes_B (B \otimes_A M) \longrightarrow N \otimes_A M$ défini par $\varphi(y \otimes (b \otimes x)) = by \otimes x$.

— $\psi\ : N \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_B (B \otimes_A M)$ défini par $\psi(z \otimes x) = z \otimes (1 \otimes x)$.

Ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre car $y \otimes (b \otimes x) = y \otimes \big(b.(1 \otimes x)\big) = by \otimes (1 \otimes x)$. Il y a donc un isomorphisme de A-module entre $N \otimes_B (B \otimes_A M)$ et $N \otimes_A M$.

On vérifie également que si $f : N' \to N$ est un morphisme de B-modules, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N' \otimes_A M & \stackrel{f \otimes \mathrm{Id}_M}{\longrightarrow} & N \otimes_A M \\ \psi' \downarrow & & \downarrow \psi \\ N' \otimes_B (B \otimes_A M) & \stackrel{f \otimes \mathrm{Id}_{B \otimes_A M}}{\longrightarrow} & N \otimes_B (B \otimes_A M) \end{array}$$

est commutatif.

Ainsi, si f injectif alors $f \otimes \mathrm{Id}_M$ l'est aussi car M est plat sur A, d'où l'injectivité de $f \otimes \mathrm{Id}_{B \otimes_A M}$, ce qui montre que $B \otimes_A M$ est plat sur B.