Exercice 12.

(1) Montrer qu'un A-module libre est projectif et plat.

(2) Soit A un anneau et E un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) E est projectif,

(b) toute suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$ *est scindée,*

(c) Il existe un A-module M' *tel que* $M' \oplus E$ *est libre.*

(3) Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de A-modules. Montrer que si* E' *et* E'' *sont projectifs alors E l'est aussi.*

(4) Montrer qu'un A-module projectif est plat.

(5) Montrer que le produit tensoriel de deux modules projectifs est projectif.

(6) Soit A un anneau et E un A-module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(d) E est injectif,

(e) toute suite exacte $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *est scindée.*

Pour (e) ⇒ (d), introduire $M = \operatorname{coker}\big(N' \xrightarrow{(f,g)} N \oplus E\big)$ *dans le diagramme :* $\begin{array}{ccc} 0 \to N' & \xrightarrow{f} & N \\ g \downarrow & & \\ E & & \end{array}$

(7) Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de A-modules. Montrer que si* E' *et* E'' *sont injectifs alors E l'est aussi.*

Solution :

(1) — Soit $E = A^{(I)}$ un module libre et $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique de E. Considérons le diagramme suivant : $\begin{array}{ccc} & & A^{(I)} \\ & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{f} & N'' \to 0 \end{array}$; pour définir un morphisme $h : A^{(I)} \to N$ il suffit de déterminer les images des éléments de la base ; pour avoir $g = h \circ f$ il suffit alors de prendre pour $h(e_i)$ un élément de $f^{-1}(g(e_i))$, ce qui montre que $A^{(I)}$ est projectif.
— Pour montrer que $A^{(I)}$ est plat on remarquera simplement que si N est un A-module alors $A^{(I)} \otimes N \simeq N^{(I)}$ et que si $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ est une suite exacte, alors cette suite tensorisée par $A^{(I)}$ n'est autre que la suite $0 \to N'^{(I)} \to N^{(I)} \to N''^{(I)} \to 0$ qui est aussi exacte.

(2) (a) ⇒ (b) Considérons le diagramme : $\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \mathrm{Id}_E \\ M & \xrightarrow{\pi} & E \to 0 \end{array}$; comme E est projectif il existe une application $s : E \to M$ telle que $\mathrm{Id}_E = \pi \circ s$; l'application s est donc une section de π ce qui montre que la suite exacte $0 \to M' \to M \xrightarrow{\pi} E \to 0$ est scindée.

(b) ⇒ (c) Considérons le module libre $M = A^{(E)}$ muni de la base canonique $(e_x)_{x\in E}$ et $\pi : M \to E$ défini par $\pi(e_x) = x$. Par construction π est surjectif. Notons M' le noyau de π de sorte qu'on a une suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} E \longrightarrow 0$. D'après (b) cette suite est scindée, ce qui signifie que $M' \oplus E \simeq M$ donc $M' \oplus E$ est libre.

(c) $\Rightarrow$ (a) Soit M' un module tel que $M' \oplus E$ est libre. À partir du diagramme suivant :
$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{f} & N'' \to 0 \end{array}$$
on construit le diagramme
$$\begin{array}{ccc} & & M' \oplus E \\ & & \downarrow (0,g) \\ N & \xrightarrow{f} & N'' \to 0 \end{array}.$$
Comme $M' \oplus E$ est libre il existe une application $h = (h_1, h_2) \; : M' \oplus E \to N$ telle que $(0, g) = f \circ (h_1, h_2)$; on a alors une application $h_1 : E \to N$ telle que $g = f \circ h_1$.

(3) D'après (b) la suite exacte $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est scindée, car E'' est projectif, d'où $E \simeq E' \oplus E''$. Il résulte alors immédiatement de (c) que E est projectif.

(4) Utiliser simplement qu'il existe un module M' tel que $M = M' \oplus E$ est libre, donc plat, et qu'un facteur direct d'un module plat est aussi plat. (Procéder comme en (1)).

(5) Soient E_1 et E_2 des modules projectifs et M'_1 et M'_2 des modules tels que $M_1 = M'_1 \oplus E_1$ et $M_2 = M'_2 \oplus E_2$ soient libres. On sait alors que
$$M_1 \otimes M_2 = (M'_1 \otimes M'_2 \oplus M'_1 \otimes E_2 \oplus E_1 \otimes M'_2) \oplus E_1 \otimes E_2$$
est libre, donc $E_1 \otimes E_2$ est projectif.

(6) (d) $\Rightarrow$ (e) Procéder comme pour (a) $\Rightarrow$ (b), et montrer que l'application $i : E \to M$ admet une rétraction $r : M \to E$ (vérifiant $r \circ i = \mathrm{Id}_E$).

(e) $\Rightarrow$ (d) Considérons le diagramme
$$\begin{array}{ccc} 0 \to & N' & \xrightarrow{f} N \\ & g \downarrow & \\ & E & \end{array}$$
et soit $M = \operatorname{coker}\bigl(N' \xrightarrow{(f,g)} N \oplus E\bigr)$.

Par construction on a des applications $f' : E \to M$ et $g' : N \to M$ telles que la suite $N' \xrightarrow{(f,g)} N \oplus E \xrightarrow{g'+f'} M \to 0$ soit exacte.

Si $f'(z) = 0$ alors $(0, z) \in \ker(g' + f')$ donc $\exists x \in N'$ tel que $(0, z) = (f(x), g(x))$; mais f est injective donc $x = 0$ et donc $z = 0$, ce qui montre que f' est injective.

On a donc un diagramme commutatif :
$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & N' & \xrightarrow{f} & N \\ & g \downarrow & & \downarrow -g' \\ 0 \to & E & \xrightarrow{f'} & M \end{array}$$

Considérant $M'' = \operatorname{coker} f'$ on obtient une suite exacte $0 \to E \xrightarrow{f'} M \to M'' \to 0$ qui est scindée (hypothèse (e)) il existe donc une application $r : M \to E$ telle que $r \circ f' = \mathrm{Id}_E$.

On pose alors $h = -r \circ g'$ et on a $h \circ f = -r \circ g' \circ f = r \circ f' \circ g = g$.

(7) D'après (e) la suite exacte $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est scindée, car E' est injectif, d'où $E \simeq E' \oplus E''$. Il résulte alors immédiatement de la définition que E est injectif.