Exercice 13. *Est-ce que $\mathbb{Q}$ est libre, injectif, projectif, plat, fidèlement plat sur $\mathbb{Z}$? Est-ce que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est libre, injectif, projectif, plat, fidèlement plat sur $\mathbb{Z}$?*

Solution : Cet exercice apparemment anodin cache quelques difficultés.
Nous allons montrer que $\mathbb{Q}$ est injectif et plat sur $\mathbb{Z}$ mais n'est pas projectif (donc pas libre), et que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif sur $\mathbb{Z}$ mais n'est pas plat (donc pas projectif, ni libre).

Quelques remarques : notons $S = \mathbb{Z}^*$;

(a) Soit M un $\mathbb{Z}$-module (c'est à dire un groupe abelien). On note $S^{-1}M$ le $\mathbb{Z}$-module formé des éléments $\dfrac{x}{n}$ avec $x \in M$ et $n \in S$ et dans lequel $\dfrac{x}{n} = \dfrac{y}{m}$ si et seulement si $\exists k \in S$: $k(mx - ny) = 0$ (c'est à dire si et seulement si $mx - ny$ est un élément de torsion de M). En particulier $\dfrac{x}{n} = 0 \left(= \dfrac{0}{1}\right)$ si et seulement si x est un élément de torsion.

(b) Si M est un $\mathbb{Z}$-module alors tout élément de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ peut s'écrire $\dfrac{1}{n} \otimes x$ avec $x \in M$, car $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i} \otimes x_i = \frac{1}{b_1 \ldots b_k} \otimes \left(\sum_{i=1}^{k} b_1 \ldots b_{i-1} a_i b_{i+1} \ldots b_k . x_i\right)$. De plus si x est un élément de torsion alors $\dfrac{1}{n} \otimes x = 0$ car $\exists k \in \mathbb{Z}^*$: $k.x = 0$ et alors $\dfrac{1}{n} \otimes x = \dfrac{1}{nk} \otimes k.x = 0$.

(c) On a une application naturelle surjective $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \to S^{-1}M$ définie par $\dfrac{1}{n} \otimes x \mapsto \dfrac{x}{n}$. De plus si $\dfrac{x}{n} = 0$ alors x est de torsion, d'après (a), et alors $\dfrac{1}{n} \otimes x = 0$, d'après (b), ce qui montre qu'on a un isomorphisme $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$. On retiendra en particulier que $\dfrac{1}{n} \otimes x = 0$ si et seulement si x est un élément de torsion.

Voici à présent la démonstration des résultats :

(1) $\mathbb{Q}$ est injectif : il faut se servir du résultat de l'exercice 15 et montrer simplement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ est surjective. Soit donc $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ et posons $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ définie par $g(k) = k\dfrac{f(n)}{n}$. Clairement $g_{|n\mathbb{Z}} = f$, ce qu'il fallait démontrer.

(2) $\mathbb{Q}$ est plat : soit $M' \xrightarrow{f} M$ une application injective ; on veut montrer que l'application $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M' \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes f} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est également injective. Si $(\mathrm{Id} \otimes f)\left(\dfrac{1}{n} \otimes x\right) = \dfrac{1}{n} \otimes f(x) = 0$ alors $f(x)$ est un élément de torsion (avec $k.x = 0$), mais alors $f(k.x) = k.f(x) = 0$ donc $k.x = 0$ car f est injective, donc x est aussi un élément de torsion ; on a donc $\dfrac{1}{n} \otimes x = 0$ ce qui montre bien l'injectivité de $\mathrm{Id} \otimes f$.

(3) $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif : considérons l'application surjective $g : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $g\big((n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}\big) = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n_k}{k}$. Si g admet une section $s : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)}$ alors on doit avoir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s(1) = ns(1/n)$, d'où $s(1/n) = s(1)/n$ or les coordonnées de $s(1)$ sont des entiers fixés non tous nuls, donc pour $n >> 0$: $s(1/n) \notin \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}^*)}$ ce qui est impossible. On en déduit d'après l'exercice 12 question (2) que $\mathbb{Q}$ n'est pas projectif.

(4) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif : procéder comme en (1).

(5) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ n'est pas plat : considérons l'application $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}$ qui est injective. L'application $f \otimes \mathrm{Id}\ : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ n'est autre que l'application $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ qui n'est pas injective car $f(1/n) = 1 = 0$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.