Exercice 14. *Considérons deux suites exactes courtes de A-modules :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha'"'] & I' \arrow[r, "\beta'"'] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où I et I' sont injectifs.

(1) (a) Établir l'existence de morphismes $\psi : I \to I'$ et $\psi' : I' \to I$ tels que $\psi \circ \alpha = \alpha'$ et $\psi' \circ \alpha' = \alpha$.

(b) Établir l'existence de morphismes $\varphi : N \to N'$ et $\varphi' : N' \to N$ tels que $\varphi \circ \beta = \beta' \circ \psi$ et $\varphi' \circ \beta' = \beta \circ \psi'$.

(c) Établir l'existence de morphismes $\gamma : N \to I$ et $\gamma' : N' \to i'$ tels que $\gamma \circ \beta = \mathrm{Id}_I - \psi' \circ \psi$ et $\gamma' \circ \beta' = \mathrm{Id}_{I'} - \psi \circ \psi'$.

(2) Établir l'existence d'un isomorphisme $I \oplus N' \simeq I' \oplus N$.

Solution :

(1) (a) Il existe $\psi : I \to I'$ tel que $\psi \circ \alpha = \alpha'$ car I' est injectif.
De même il existe $\psi' : I' \to I$ tel que $\psi' \circ \alpha' = \alpha$ car I est injectif.

(b) Comme $N \simeq \operatorname{coker} \alpha$ et $(\beta' \circ \psi) \circ \alpha = \beta' \circ \alpha' = 0$ on sait qu'il existe un morphisme $\varphi : N \to N'$ tel que $\varphi \circ \beta = \beta' \circ \psi$. (C'est la propriété universelle du conoyau)
De même il existe un morphisme $\varphi' : N' \to N$ tel que $\varphi' \circ \beta' = \beta \circ \psi'$.

On obtient donc deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha'"'] & I' \arrow[r, "\beta'"'] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha'"'] & I' \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[u, "\psi'"] & N' \arrow[r] \arrow[u, "\varphi'"] & 0 \end{tikzcd}$$

(c) Comme $N \simeq \operatorname{coker} \alpha$ et $(\mathrm{Id}_I - \psi' \circ \psi) \circ \alpha = \alpha - \psi' \circ \psi \circ \alpha = \alpha - \psi' \circ \alpha' = \alpha - \alpha = 0$ on sait qu'il existe un morphisme $\gamma : N \to I$ tel que $\gamma \circ \beta = \mathrm{Id}_I - \psi' \circ \psi$. (C'est la propriété universelle du conoyau)
De même il existe un morphisme $\gamma' : N' \to I'$ tel que $\gamma' \circ \beta' = \mathrm{Id}_{I'} - \psi \circ \psi'$.

(2) Pour déterminer un isomorphisme $\chi : I \oplus N' \to I' \oplus N$ il faut quatre morphismes $I \to I'$, $I \to N$, $N' \to N$ et $N' \to I'$. La première question nous donne des candidats pour ces morphismes.
De même pour déterminer l'isomorphisme réciproque $\chi' : I' \oplus N \to I \oplus N'$.

Les deux morphismes "candidats" $\chi : I \oplus N' \to I' \oplus N$ et $\chi' : I' \oplus N \to I \oplus N'$ peuvent s'écrire sous forme matricielle (quelques essais sont nécessaires pour trouver les signes corrects à affecter à chaque coefficients) : $\chi = \begin{pmatrix} \psi & \gamma' \\ \beta & -\varphi' \end{pmatrix}$ et $\chi' = \begin{pmatrix} \psi' & \gamma \\ \beta' & -\varphi \end{pmatrix}$.

Il reste à vérifier les relations :

$$\chi \circ \chi' = \begin{pmatrix} \psi \circ \psi' + \gamma' \circ \beta' & \psi \circ \gamma - \gamma' \circ \varphi \\ \beta \circ \psi' - \varphi' \circ \beta' & \beta \circ \gamma + \varphi' \circ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{I'} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_N \end{pmatrix}$$

Deux de ces quatre relations sont déjà connues : $\psi \circ \psi' + \gamma' \circ \beta' = \mathrm{Id}_{I'}$ et $\beta \circ \psi' - \varphi' \circ \beta' = 0$ (cette dernière éclaircit le choix des signes dans les matrices).

Pour vérifier $\beta \circ \gamma + \varphi' \circ \varphi = \mathrm{Id}_N$ il suffit de vérifier que $(\mathrm{Id}_N - \beta \circ \gamma - \varphi' \circ \varphi) \circ \beta = 0$ car β est surjective. On fait le calcul à l'aide des propriétés établies à la question (1) : $(\beta \circ \gamma + \varphi' \circ \varphi) \circ \beta = \beta \circ (\gamma \circ \beta) + \varphi' \circ (\varphi \circ \beta) = \beta \circ (\mathrm{Id}_I - \psi' \circ \psi) - \varphi' \circ (\beta' \circ \psi) = \beta + (-\beta \circ \psi' + \varphi' \circ \beta') \circ \psi = \beta$.

De même pour vérifier que $\psi \circ \gamma - \gamma' \circ \varphi = 0$ il suffit de vérifier que $(\psi \circ \gamma - \gamma' \circ \varphi) \circ \beta = 0$. En effet : $\psi \circ \gamma \circ \beta = \psi \circ (\mathrm{Id}_I - \psi' \circ \psi) = (\mathrm{Id}_{I'} - \psi \circ \psi') \circ \psi = \gamma' \circ \beta' \circ \psi = \gamma' \circ \varphi \circ \beta$.

On vérifie de la même manière les relations :

$$\chi' \circ \chi = \begin{pmatrix} \psi' \circ \psi + \gamma \circ \beta & \psi' \circ \gamma' - \gamma \circ \varphi' \\ \beta' \circ \psi - \varphi \circ \beta & \beta' \circ \gamma' + \varphi \circ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_I & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{N'} \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que χ et χ' sont des isomorphismes réciproques.