Exercice 15. *(Lemme de Baer) Montrer qu'un A-module E est injectif si et seulement si pour tout idéal I de A, l'application* $\mathrm{Hom}_A(A,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(I,E)$ *est surjective.*

Solution : On considère le diagramme $\begin{array}{ccc} 0 \to & N' & \xrightarrow{f} N \\ & {\scriptstyle g}\downarrow & \\ & E & \end{array}$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (P, h_P) où P est un sous-module de N tel que $f(N') \subset P$ et h_P un morphisme $P \to E$ tel que $g = h_P \circ f$.

On définit sur $\mathcal{E}$ la relation d'ordre $(P, h_P) \preceq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $(h_Q)_{|P} = h_P$.

Soit $(P_i, h_{P_i})_{i\in\Im}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{E}$. (Pour tout $i, j \in \Im$ on a $(P_i, h_{P_i}) \preceq (P_j, h_{P_j})$ ou $(P_j, h_{P_j}) \preceq (P_i, h_{P_i})$.) On pose $P = \bigcup_{i\in\Im} P_i$ et on définit $h : P \to E$ par $h(x) = h_{P_i}(x)$ si $x \in P_i$ de sorte que $(P, h_P) \in \mathcal{E}$. Ainsi tout sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{E}$ admet un majorant donc, d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal (M, h_M). (Si $(M, h_M) \preceq (P, h_P)$ alors $(M, h_M) = (P, h_P)$.)

On suppose $M \subsetneq N$:

On considère $x \in N \setminus M$, $P = M + A.x$ et $I = (M : x) = \{a \in A,\ a.x \in M\}$ et on définit $\gamma : I \to E$ par $\gamma(a) = h_M(a.x)$. D'après l'hypothèse de l'énoncé il existe alors $\varphi : A \to E$ tel que $\varphi_{|I} = \gamma$.

On définit alors $h_P : P \to E$ par $h_P(y + a.x) = h_M(y) + \varphi(a)$ (où $y \in M$). Cette définition est consistante car si $y + a.x = y' + a'.x$ alors $(a' - a).x = y - y' \in M$ donc $a' - a \in I$ et $\varphi(a' - a) = \gamma(a' - a) = h_M((a' - a).x) = h_M(y - y')$ d'où $h_M(y) + \varphi(a) = h_M(y') + \varphi(a')$.

On a ainsi obtenu un élément (P, h_P) tel que $(M, h_M) \prec (P, h_P)$ ce qui est impossible car (M, h_M) est maximal. On a donc $M = N$ et un morphisme $h : N \to E$ tel que $h \circ f = g$. Ceci étant vrai pour tout diagramme $\begin{array}{ccc} 0 \to & N' & \xrightarrow{f} N \\ & {\scriptstyle g}\downarrow & \\ & E & \end{array}$ on a bien montré que E est injectif.