Exercice 16.

(1) Montrer que tout A-module M est limite inductive filtrante de modules de type fini.

(2) Montrer que tout A-module de type fini est limite inductive filtrante de modules de présentation finie. (On dit qu'un A-module M est de présentation finie s'il existe un morphisme $f : A^m \to A^n$ tel que $M = \operatorname{coker} f$.)

Solution :

(1) Soit I l'ensemble des partie finies de M. Si $i = \{x_1, \dots, x_n\} \in I$ on note M_i le sous-modules de M engendré par $\{x_1, \dots, x_n\}$. On définit sur I la relation de préordre suivante : $i \leq j \iff M_i \subset M_j$.
Ce préordre est évidement filtrant car si $i, j \in I$ alors $i \leq i \cup j$ et $j \leq i \cup j$.
Il est aussi clair que $M = \bigcup_{i \in I} M_i = \varinjlim_{i \in I} M_i$.

(2) Soit M un module de type fini, $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de générateurs, $g : A^n \to M$ l'application surjective définie par $g(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i$ et $K = \ker g$.
D'après la question (1) on sait que K est la limite inductive de ses sous-modules de type fini K_i ($i \in I$, où I est l'ensemble des partie finies de K). On a donc des injections naturelles $K_i \overset{f_i}{\hookrightarrow} A^n$.
On pose $M_i = \operatorname{coker} f_i$; on a alors pour tout $i \in I$ un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] & A^n \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[u, hook] & A^n \arrow[r, "g_i"] \arrow[u, equal] & M_i \arrow[r] \arrow[u, two heads] & 0
\end{tikzcd}$$

De plus si $i \leq j$ alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_j \arrow[r, "f_j"] & A^n \arrow[r, "g_j"] & M_j \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[u, hook] & A^n \arrow[r, "g_i"] \arrow[u, equal] & M_i \arrow[r] \arrow[u, two heads] & 0
\end{tikzcd}$$

La famille de module $\{M_i\}_{i \in I}$ forme donc un système inductif filtrant.
On en déduit que $\varinjlim_{i \in I} M_i \simeq \operatorname{coker}(\varinjlim_{i \in I} K_i \to A^n) \simeq \operatorname{coker}(K \xrightarrow{f} A^n) \simeq M$.