Exercice 17. *Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux commutatifs unitaires.*

(1) Montrer que $A = \varinjlim A_i$ est naturellement muni d'une structure d'anneau.

(2) Montrer que si $A \simeq 0$ alors il existe $i \in I$ tel que $A_i \simeq 0$.

(3) Définir la notion de système inductif $\{M_i\}_{i\in I}$ de A_i-modules et montrer l'existence de la limite inductive $\varinjlim M_i$ comme A-module.

(4) Soient $\{M_i\}_{i\in I}$ et $\{N_i\}_{i\in I}$ des systèmes inductifs de A_i-modules. Etablir l'isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i$$

Solution : Pour tout $i \leq j$ on note $\varphi_{j,i} : A_i \to A_j$ le morphisme d'anneau donné par le système inductif, et pour tout $i \in I$ on note $\varphi_i : A_i \to A$ l'application naturelle à valeur dans la limite inductive (dont on ne sait rien a priori). On a pour tout $i \leq j \leq k$: $\varphi_{k,j} \circ \varphi_{j,i} = \varphi_{k,i}$ et pour tout $i \leq j$: $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{j,i}$.

(1) Soient $a, b \in A$; comme le système est filtrant on sait qu'il existe $i \in I$ et $a_i \in A_i$ tel que $a = \varphi_i(a_i)$ et $j \in I$ et $b_j \in A_j$ tel que $b = \varphi_j(b_j)$; on considère alors $k \in I$ tel que $k \geq i, j$ et on pose $a_k = \varphi_{k,i}(a_i)$ et $b_k = \varphi_{k,j}(b_j)$; on pose alors $a + b = \varphi_k(a_k + b_k)$ et $a.b = \varphi_k(a_k.b_k)$.
Si l'on choisit d'autres éléments i', $a_{i'}$, j', $b_{j'}$, k', $a_{k'} = \varphi_{k',i'}(a_{i'})$ et $b_{k'} = \varphi_{k',j'}(b_{j'})$ alors il existe $n \in I$ tel que $n \geq k, k'$. On a alors $\varphi_{n,k}(a_k) = \varphi_{n,k'}(a_{k'}) = a_n$ et $\varphi_{n,k}(b_k) = \varphi_{n,k'}(b_{k'}) = b_n$ car tous ces éléments représentent les éléments $a, b \in \varinjlim_{i\in I} A_i$; sachant que $\varphi_k(a_k+b_k) = \varphi_n(a_n+b_n) = \varphi_k(a_{k'}+b_{k'})$ et $\varphi_k(a_k.b_k) = \varphi_n(a_n.b_n) = \varphi_k(a_{k'}.b_{k'})$, on montre que la définition de $a + b$ et de $a.b$ ne dépend d'aucun choix.
Le lecteur vérifiera que $(A, +, .)$ un bien un anneau et que les applications φ_i sont des morphismes d'anneaux.

(2) Si $A \simeq 0$ alors $1_A = 0_A$ donc il existe i tel que $1_{A_i} = 0_{A_i}$ et donc $A_i \simeq 0$.

(3) Un système inductif $\{M_i\}_{i\in I}$ de A_i-modules est la donnée, pour tout i d'un A_i-module et pour tout $i \leq j$ d'un morphisme de A_i-modules $\psi_{j,i} : M_i \to M_j$. (En effet si $i \leq j$ alors M_j a une structure de A_i-module définie par $a_i.x_j = \varphi_{j,i}(a_i).x_j$.)
Soit $x \in M = \varinjlim_{i\in I} M_i$ et $a \in A \varinjlim_{i\in I} A_i$; on définit $a.x$ comme en (1) : on choisit $k \in I$ tel que $x = \psi_k(x_k)$ et $a = \varphi_k(a_k)$ et on pose $a.x = \psi_k(a_k.x_k)$. Cette définition ne dépend pas de k.
Le lecteur vérifiera que M un bien un A-module et que les applications ψ_i sont des morphismes de A_i-modules.

(4) On utilise la lettre ψ pour les morphismes associés au système inductif $\{M_i\}_{i\in I}$, la lettre χ pour $\{N_i\}_{i\in I}$ et la lettre ω pour $\{M_i \otimes_{A_i} N_i\}_{i\in I}$.
Les morphismes $\psi_i : M_i \to \varinjlim_{i\in I} M_i$ et $\chi_i : N_i \to \varinjlim_{i\in I} N_i$ déterminent un morphisme de A_i-modules $\psi_i \otimes \chi_i : M_i \otimes_{A_i} N_i \to \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i$. Le morphisme $\phi_i : A_i \to A$ détermine un morphisme de A_i-modules $\varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_{A_i} \varinjlim_{i\in I} N_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i$. Par composition on

obtient un morphisme de A_i-module $f_i : M_i \otimes_{A_i} N_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i$, et par propriété universelle de la limite inductive, un morphisme de A-modules

$$f : \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i) \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i.$$

Ce morphisme est défini élémentairement de la manière suivante : si $t \in \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i)$ alors il existe $i \in I$ et $t_i = \sum_{k=1}^{n} x_{i,k} \otimes y_{i,k} \in M_i \otimes_{A_i} N_i$ tels que $t = \omega_i(t_i)$; on pose alors

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_i(x_{i,k}) \otimes \chi_i(y_{i,k}).$$

De même on a un morphisme bilinéaire de A_i-modules $M_i \oplus N_i \to \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i)$. Par propriété universelle de la limite inductive (qui commute à la somme directe) on a donc un morphisme bilinéaire de A_i-modules $\varinjlim_{i\in I} M_i \oplus \varinjlim_{i\in I} N_i \to \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i)$ et par propriété universelle du produit tensoriel, un morphisme de A-modules

$$g : \varinjlim_{i\in I} M_i \otimes_A \varinjlim_{i\in I} N_i \to \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_{A_i} N_i).$$

Ce morphisme est défini élémentairement de la façon suivante : si $x \in \varinjlim_{i\in I} M_i$ $y \in \varinjlim_{i\in I} N_i$ alors il existe $i \in I$, $x_i \in M_i$ et $y_i \in N_i$ tels que $x = \psi_i(x_i)$ et $y = \chi_i(y_i)$; on pose alors

$$g(x \otimes y) = \omega_i(x_i \otimes y_i).$$

Les expressions élémentaires des deux morphismes f et g permettent de vérifier aisément qu'ils sont réciproques.