Exercice 18. *Soient* $\{F_n,\ n \in \mathbb{N},\ f_{n,p} : F_p \to F_n,\ p \geq n\}$, $\{G_n,\ n \in \mathbb{N},\ g_{n,p} : G_p \to G_n,\ p \geq n\}$ *et* $\{H_n,\ n \in \mathbb{N},\ h_{n,p} : H_p \to H_n,\ p \geq n\}$ *des systèmes projectifs de A-modules indexés par l'ensemble des entiers naturels. On suppose que* $0 \longrightarrow \{F_n\} \xrightarrow{\{u_n\}} \{G_n\} \xrightarrow{\{v_n\}} \{H_n\} \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de systèmes projectifs.*

(1) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(\operatorname{im} f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ de sous-module de F_n est décroissante.*

On dit que $\{F_n\}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler (M-L) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(\operatorname{im} f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N,\ \operatorname{im} f_{n,p} = \operatorname{im} f_{n,N}$.

(2) *On suppose que $\{F_n\}$ vérifie la condition (M-L).*

  (a) *On note N_n le plus petit entier tel que $\forall p \geq N_n,\ \operatorname{im} f_{n,p} = \operatorname{im} f_{n,N_n}$; montrer que la suite $(N_n)_{n\in N}$ est croissante.*

  (b) *Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim H_n$, $y'_{N_0} \in v_{N_0}^{-1}(z_{N_0})$ un antécédent de z_{N_0} et $y_0 = g_{0,N_0}(y'_{N_0})$; montrer que pour tout $p > N_0$ il existe $y'_p \in v_p^{-1}(z_p)$ tel que $g_{0,p}(y'_p) = y_0$; en déduire l'existence de $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim G_n$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : z_n = v_n(y_n)$.*

  (c) *Montrer que la suite $0 \longrightarrow \varprojlim F_n \xrightarrow{u} \varprojlim G_n \xrightarrow{v} \varprojlim H_n \longrightarrow 0$ est exacte.*

(3) *Montrer que si $\{G_n\}$ vérifie la condition (M-L) alors $\{H_n\}$ la vérifie aussi.*

(4) *On suppose que $\{F_n\}$ et $\{H_n\}$ vérifient la condition (M-L), et on fixe $n < N < P < p$ des entiers naturels tels que :*

$$\forall q \geq N,\ \operatorname{im} f_{n,q} = \operatorname{im} f_{n,N} \quad \text{et} \quad \forall q \geq P,\ \operatorname{im} h_{N,q} = \operatorname{im} h_{N,P}\ .$$

  (α) *Faire un diagramme (fortement recommandé pour la suite) incluant les modules F_n, F_N, F_P, F_p, G_n, ... H_p.*

  (a) *Montrer que $v_N(\operatorname{im} g_{N,p}) = v_N(\operatorname{im} g_{N,P})$.*

  (b) *Montrer que $\operatorname{im} g_{N,P} \subset \operatorname{im} g_{N,p} + \operatorname{im} u_N$*

  (c) *Montrer que $\operatorname{im} g_{n,P} \subset \operatorname{im} g_{n,p} + u_n(\operatorname{im} f_{n,N})$*

  (d) *Montrer que $\{G_n\}$ vérifie la condition (M-L).*

Solution :

(1) On a pour tout $p < q$: $f_{n,q} = f_{n,p} \circ f_{p,q}$ donc $\operatorname{im} f_{n,p} \subset \operatorname{im} f_{n,q}$.

(2) (a) On a : $\forall p > n+1 : \operatorname{im} f_{n,p} = f_{n,n+1}(\operatorname{im} f_{n+1,p})$ donc $\forall p > N_{n+1} : \operatorname{im} f_{n,p} = \operatorname{im} f_{n,N_{n+1}}$ d'où $N_{n+1} \geq N_n$ par minimalité de N_n.

  (b) Le diagramme commutatif suivant peut aider à suivre le raisonnement :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "u_0"] & G_0 \arrow[r, "v_0"] & H_0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{N_0} \arrow[r, "u_{N_0}"] \arrow[u, "f_{0,N_0}"] & G_{N_0} \arrow[r, "v_{N_0}"] \arrow[u, "g_{0,N_0}"'] & H_{N_0} \arrow[r] \arrow[u, "h_{0,N_0}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_p \arrow[r, "u_p"] \arrow[u, "f_{N_0,p}"] \arrow[uu, bend right, "f_{0,p}"'] & G_p \arrow[r, "v_p"] \arrow[u, "g_{N_0,p}"'] \arrow[uu, bend right, "g_{0,p}"'] & H_p \arrow[r] \arrow[u, "h_{N_0,p}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit $y''_p \in v_p^{-1}(z_p)$ un antécédent de z_p ; on a $v_{N_0}\big(g_{N_0,p}(y''_p)\big) = h_{N_0,p}\big(v_p(y''_p)\big) = z_{N_0}$ donc l'élément $y''_{N_0} = g_{N_0,p}(y''_p)$ est aussi un antécédent de z_{N_0} donc $y'_{N_0} - y''_{N_0} \in \ker v_{N_0} = \operatorname{im} u_{N_0}$. Il existe donc $x_{N_0} \in F_{N_0}$ tel que $y'_{N_0} - y''_{N_0} = u_{N_0}(x_{N_0})$. Comme $\{F_n\}$ vérifie la condition (M-L) on sait qu'il existe $x_p \in F_p$ tel que $f_{0,p}(x_p) = f_{0,N_0}(x_{N_0})$. (Mais on n'a pas nécessairement $f_{N_0,p}(x_p) = x_{N_0}$.) On pose alors $y'_p = y''_p + u_p(x_p)$ et on a :

$$\begin{aligned} g_{0,p}(y'_p) &= g_{0,p}(y''_p) + g_{0,p}\big(u_p(x_p)\big) = g_{0,N_0}\big(g_{N_0,p}(y''_p)\big) + u_0\big(f_{0,p}(x_p)\big) \\ &= g_{0,N_0}(y''_{N_0}) + u_0\big(f_{0,N_0}(x_{N_0})\big) = g_{0,N_0}(y''_{N_0}) + g_{0,N_0}\big(u_{N_0}(x_{N_0})\big) = g_{0,N_0}(y'_{N_0}) = y_0 \end{aligned}$$

et $v_p(y'_p) = v_p(y''_p) + v_p\big(u_p(x_p)\big) = z_p$.

On remarque que $v_0(y_0) = v_0\big(g_{0,N_0}(y'_{N_0})\big) = h_{0,N_0}\big(v_{N_0}(y'_{N_0})\big) = h_{0,N_0}(z_{N_0}) = z_0$.

On construit alors y_1 de la façon suivante : on prend $y'_{N_1} \in G_{N_1}$ tel que $v_{N_1}(y'_{N_1}) = z_{N_1}$ et $g_{0,N_1}(y'_{N_1}) = y_0$ (ce qui est possible d'après ce qui précède car $N_1 \geq N_0$) et on pose $y_1 = g_{1,N_1}(y'_{N_1})$ de sorte que $v_1(y_1) = z_1$ et $g_{0,1}(y_1) = y_0$.

De plus on montre comme précédemment que pour tout $p > N_1$ il existe $y'_p \in G_p$ tel que $f_{1,p}(y'_p) = y_1$ et $v_p(y'_p) = z_p$. Ce qui permet de construire $y_2 \in G_2$ tel que $v_2(y_2) = z_2$ et $g_{1,2}(y_2) = y_1$, etc..

On obtient par itérations une famille $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n(y_n) = z_n$ et $f_{n,n+1}(y_{n+1}) = y_n$; cette dernière propriété montre bien que $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim G_n$.

(c) On sait que $\varprojlim$ est un foncteur exact à gauche ; il suffit donc de vérifier que $\varprojlim G_n \xrightarrow{v} \varprojlim H_n$ est surjectif, ce qui est le cas d'après (b).

(3) Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p > N$: $\operatorname{im} g_{n,p} = \operatorname{im} g_{n,N}$. Soit $p > N$; on a $\operatorname{im} h_{n,p} = \operatorname{im}(h_{n,p} \circ v_p)$ car v_p est surjective donc $\operatorname{im} h_{n,p} = \operatorname{im}(v_n \circ g_{n,p}) = v_n(\operatorname{im} g_{n,p})$ et de même $\operatorname{im} h_{n,N} = v_n(\operatorname{im} g_{n,N})$; or $\operatorname{im} g_{n,p} = \operatorname{im} g_{n,N}$ donc $\operatorname{im} h_{n,p} = \operatorname{im} h_{n,N}$ ce qui montre bien que $\{H_n\}$ vérifie la condition (M-L).

(4) (α)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_n \arrow[r, "u_n"] & G_n \arrow[r, "v_n"] & H_n \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_N \arrow[r, "u_N"] \arrow[u, "f_{n,N}"] & G_N \arrow[r, "v_N"] \arrow[u, "g_{n,N}"] & H_N \arrow[r] \arrow[u, "h_{n,N}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_P \arrow[r, "u_P"] \arrow[u, "f_{N,P}"] & G_P \arrow[r, "v_P"] \arrow[u, "g_{N,P}"] \arrow[uu, bend right, "g_{n,P}"'] & H_P \arrow[r] \arrow[u, "h_{N,P}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_p \arrow[r, "u_p"] \arrow[u, "f_{P,p}"] \arrow[uuu, bend right, "f_{n,p}"'] & G_p \arrow[r, "v_p"] \arrow[u, "g_{P,p}"] \arrow[uu, bend right, "g_{N,p}"'] \arrow[uuu, bend right=40, "g_{n,p}"'] & H_p \arrow[r] \arrow[u, "h_{P,p}"'] \arrow[uu, bend right, "h_{N,p}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

(a) Comme dans la question (3), $v_N(\operatorname{im} g_{N,P}) = \operatorname{im} h_{N,P} = \operatorname{im} h_{N,p} = v_N(\operatorname{im} g_{N,p})$.

(b) Soit $y_N = g_{N,P}(y_P) \in \operatorname{im} g_{N,P}$ d'après (a), il existe $y'_p \in G_p$ tel que $v_N\big(g_{N,p}(y'_p)\big) = v_N\big(g_{N,P}(y_P)\big) = v_N(y_N)$. On pose $y'_N = g_{N,p}(y'_p)$ et alors $y_N - y'_N \in \ker v_N = \operatorname{im} u_N$ ce qui montre bien que $y_N \in \operatorname{im} g_{N,p} + \operatorname{im} u_N$, d'où l'inclusion $\operatorname{im} g_{N,P} \subset \operatorname{im} g_{N,p} + \operatorname{im} u_N$.

(c) On utilise (b) pour faire la calcul suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{im} g_{n,P} &= g_{n,N}(\operatorname{im} g_{N,P}) \subset g_{n,N}(\operatorname{im} g_{N,p}) + g_{n,N}(\operatorname{im} u_N) \\ &= \operatorname{im} g_{n,p} + \operatorname{im}(g_{n,N} \circ u_N) = \operatorname{im} g_{n,p} + \operatorname{im}(u_n \circ f_{n,N}) = \operatorname{im} g_{n,p} + u_n(\operatorname{im} f_{n,N}). \end{aligned}$$

(d) On a : $u_n(\operatorname{im} f_{n,N}) = u_n(\operatorname{im} f_{n,p})$ car $\{F_n\}$ vérifie la condition (M-L) donc $u_n(\operatorname{im} f_{n,N}) = \operatorname{im}(u_n \circ f_{n,p}) = \operatorname{im}(g_{n,p} \circ u_p) \subset \operatorname{im} g_{n,p}$. On en déduit d'après (c) que si $p > P$ alors $\operatorname{im} g_{n,P} \subset \operatorname{im} g_{n,p}$, et l'égalité résulte de l'inclusion réciproque qui est toujours vraie. $\{G_n\}$ vérifie donc la condition (M-L).