Exercice 19. *Soit $W = \mathbb{C}[x, y, \partial_x, \partial_y]$ l'algèbre de Weil à deux variables. (C'est la $\mathbb{C}$-algèbre non commutative dont les générateurs vérifient les relations : $xy = yx$, $\partial_x y = y\partial_x$, $\partial_y x = x\partial_y$, $\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$, $\partial_x x = x\partial_x + 1$ et $\partial_y y = y\partial_y + 1$.)*
Soit $\varphi_1 : W \longrightarrow W$, $\omega \longmapsto \omega x$ et $\varphi_2 : W \longrightarrow W$, $\omega \longmapsto \omega\partial_y$. Construire le complexe de Koszul $K^\bullet(A, \varphi)$ et calculer ses modules de cohomologie.

Solution :

Cet exercice se résout sans difficulté si l'on a une bonne écriture des éléments de W.

L'écriture des éléments de W n'est pas unique car l'anneau n'est pas commutatif. Cependant les relations entre les générateurs montrent que tout élément de W peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire à coefficient dans $\mathbb{C}$ de monômes de la forme $x^i y^j \partial_x^k \partial_y^\ell$.

Cette représentation n'est cependant pas la seule ; pour l'exercice nous préférerons écrire les éléments de W comme combinaison linéaire de monômes de la forme $y^i\partial_x^j\partial_y^k x^\ell$. Cette écriture est également unique ; autrement dit les monômes $y^i\partial_x^j\partial_y^k x^\ell$ forment une base de W en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Le complexe de Koszul $K^\bullet(W, \varphi)$ est le complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$0 \to W \xrightarrow{u} W^2 \xrightarrow{v} W \to 0$$

où $u(\omega) = (\omega x, \omega\partial_y)$ et $v(\eta, \theta) = \theta x - \eta\partial_y$.

On remarque que φ_1 est injectif (évident d'après la décomposition des éléments dans la base choisie) et que $\operatorname{coker}\varphi_1$ a pour base sur $\mathbb{C}$ l'ensemble des classes modulo x des monômes $y^i\partial_x^j\partial_y^k$.

On remarque alors que l'endomorphisme induit par φ_2 sur $\operatorname{coker}\varphi_1$, $\mathrm{cl}(\omega) \longmapsto \mathrm{cl}(\omega\partial_y)$ est aussi injectif (d'après la décomposition des éléments dans la base de $\operatorname{coker}\varphi_1$).

Conclusion : $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est une suite régulière, donc $H_0(K^\bullet(W, \varphi)) = 0$, $H_1(K^\bullet(W, \varphi)) = 0$ et $H_2(K^\bullet(W, \varphi)) = W/(\operatorname{im}\varphi_1 + \operatorname{im}\varphi_2)$.

Ainsi $H_2(K^\bullet(W, \varphi))$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par les classes modulo (x, ∂_y) des monômes $y^i\partial_x^j$.

Comme y et ∂_x commutent entre eux on en déduit que $H_2(K^\bullet(W, \varphi))$ est isomorphe à un anneau de polynômes à deux variables à coefficient dans $\mathbb{C}$.