Exercice 20. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.*

(1) On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I. Soit $C^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow C^\infty(I) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{d}(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C^\bullet)$ et $H^1(C^\bullet)$.

(2) On note $C_c^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I à support compact. (On rappelle que le support d'une fonction $f \in C^\infty(I)$ est l'adhérence dans I de l'ensemble $\{x \in I,\ f(x) \neq 0\}$.) Soit $C_c^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow C_c^\infty(I) \xrightarrow{\mathrm{d}_c} C_c^\infty(I) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{d}_c(f) = f'$. Calculer les modules de cohomologie $H^0(C_c^\bullet)$ et $H^1(C_c^\bullet)$.

Solution : On note $I =]a, b[$.

(1) On a $H^0(C^\bullet) = \ker \mathrm{d}$ et $H^1(C^\bullet) = C^\infty(I)/\operatorname{im}\mathrm{d}$. Si $\mathrm{d}f = 0$ alors f est une fonction constante, donc $H^0(C^\bullet) \simeq \mathbb{R}$. Si $g \in C^\infty(I)$ alors g admet une primitive f, c'est à dire un antécedant par d, donc $\operatorname{im}\mathrm{d} = C^\infty(I)$ et $H^1(C^\bullet) = 0$.

(2) On a $H^0(C_c^\bullet) = \ker \mathrm{d}_c$ et $H^1(C_c^\bullet) = C_c^\infty(I)/\operatorname{im}\mathrm{d}_c$. Si $\mathrm{d}_c f = 0$ alors f est constante, mais ici f est à support compact $K \subset [\alpha, \beta] \subsetneq]a, b[$ (c'est à dire $f \equiv 0$ sur $]a, \alpha] \cup [\beta, b[$) donc $f = 0$ et $H^0(C_c^\bullet) = 0$. Si $g \in C_c^\infty(I)$ est à support compact $K \subset [\alpha, \beta]$, une primitive de g est $f(x) = \displaystyle\int_\alpha^x g(t)\mathrm{d}t$. On a $f \equiv 0$ sur $]a, \alpha]$ et $f \equiv \displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sur $[\beta, b[$; on en déduit que f est à support compact, c'est à dire $g \in \operatorname{im}\mathrm{d}_c$, si et seulement si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$. Il en résulte que $H^1(C_c^\bullet) \simeq \mathbb{R}$ défini par $\bar{g} \mapsto \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.