Exercice 21. *Soit $U = I \times J$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, produit de deux intervalles ouverts I et J de $\mathbb{R}$. On note $C^\infty(U)$ l'ensemble des fonction de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur U et pour $k \in \{1,2\}$, $C^{\infty,k}(U)$ l'ensemble des k-formes différentielles extérieures à coefficients dans $C^\infty(U)$. Soit $\mathrm{DR}(U)$ le complexe de De Rham à coefficients dans $C^\infty(U)$:*

$$0 \longrightarrow C^\infty(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} C^{\infty,1}(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} C^{\infty,2}(U) \longrightarrow 0$$
$$\text{où}\quad \mathrm{d}^0(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \mathrm{d}^1(g\mathrm{d}x + h\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

(1) Montrer que $\mathrm{DR}(U)$ est un complexe de Koszul $\mathrm{K}^\bullet(M,\varphi)$ pour un module M et des endomorphismes $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ que l'on précisera.

(2) Montrer que la suite (φ_1,φ_2) est corégulière, et en déduire la cohomologie de $\mathrm{DR}(U)$.

On note $C_c^\infty(U)$ l'ensemble des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur U à support compact et pour $k \in \{1,2\}$, $C_c^{\infty,k}(U)$ l'ensemble des k-formes différentielles extérieures à coefficients dans $C_c^\infty(U)$. Soit $\mathrm{DR}_c(U)$ le complexe de De Rham à coefficients dans $C_c^\infty(U)$:

$$0 \longrightarrow C_c^\infty(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_c^0} C_c^{\infty,1}(U) \xrightarrow{\mathrm{d}_c^1} C_c^{\infty,2}(U) \longrightarrow 0$$
$$\text{où}\quad \mathrm{d}_c^0(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}_c x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}_c y \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_c^1(g\mathrm{d}_c x + h\mathrm{d}_c y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}_c x \wedge \mathrm{d}_c y$$

(3) Montrer que $\mathrm{DR}_c(U)$ est un complexe de Koszul $\mathrm{K}^\bullet(N,\psi)$ pour un module N et des endomorphismes $\varphi_c = (\psi_1,\psi_2)$ que l'on précisera.

(4) Montrer que la suite (ψ_1,ψ_2) est régulière, et en déduire la cohomologie de $\mathrm{DR}_c(U)$.

Solution : On note $U =]a,b[\, \times \,]c,d[$. Si M est un A-module et $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ des endomorphismes qui commutent, le complexe de Koszul associé à M et φ est :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{d}_0} M \otimes A^2 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} M \otimes \bigwedge^2 A^2 \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{d}_0(x) = \varphi_1(x)e_1 + \varphi_2(x)e_2$ et $\mathrm{d}_1(ye_1 + ze_2) = \varphi_2(y)e_2 \wedge e_1 + \varphi_1(z)e_1 \wedge e_2$ où (e_1,e_2) est la base canonique de A^2. À l'aide des isomorphismes $M \otimes A^2 \simeq M^2$ et $M \otimes \wedge^2 A^2 \simeq M \otimes A \simeq M$ on peut réécrire cette suite suos la forme

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mathrm{d}_0} M^2 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} M \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{d}_0(x) = \big(\varphi_1(x),\varphi_2(x)\big)$ et $\mathrm{d}_1(y,z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(y)$. Cette mise au point permet de répondre à la première question :

(1) Prendre $M = C^\infty(U)$ (espace vectoriel dur $\mathbb{R}$), $\varphi_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\varphi_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(2) Dire que la suite (φ_1,φ_2) est corégulière signifie que les morphismes $\varphi_1 : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ et $\varphi_2 : \ker\varphi_1 \to \ker\varphi_1$ sont surjectifs. Cela se vérifie aisément :
— si $g \in C^\infty(U)$ alors $f(x,y) = \displaystyle\int_\alpha^x g(t,y)\mathrm{d}t$ (où $\alpha \in]a,b[$) est un antécédent de g par φ_1 ;
— si $h \in \ker\varphi_1$ alors $h(x,y) = h(y)$ ne dépend pas de x, et h admet une primitive en y, c'est à dire un antécédant par φ_2, comme on l'a déjà vu dans l'exercice 20.

On en déduit, par théorème, que $H_1(\mathrm{DR}(U)) = 0$ et $H_2(\mathrm{DR}(U)) = 0$. On a par ailleur : $H_0(\mathrm{DR}(U)) = (\ker\varphi_1) \cap (\ker\varphi_2)$, ce qui est l'ensemble des fonctions constantes sur U, d'où $H_0(\mathrm{DR}(U)) \simeq \mathbb{R}$.

(3) Comme en (1), prendre $M = C_c^\infty(U)$ (espace vectoriel dur $\mathbb{R}$), $\psi_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\psi_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(4) Dire que la suite (ψ_1, ψ_2) est régulière signifie que les morphismes $\psi_1 : C_c^\infty(U) \to C_c^\infty(U)$ et $\psi_2 : \operatorname{coker}\psi_1 \to \operatorname{coker}\psi_1$ sont injectifs. Cela se vérifie aisément :

— si $f \in C_c^\infty(U)$ est à support compact $K \subset [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta] \subsetneq]a,b[\times]c,d[$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ alors $f(x,y) = f(y)$ ne dépend pas de x ; mais si $x \in]a,\alpha]$ alors $f(x,y) = 0$ donc $f = 0$.

— Soit $g \in \operatorname{im}\psi_1$; il existe $f \in C_c^\infty(U)$, à support compact $K \subset [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta] \subsetneq]a,b[\times]c,d[$ tel que $g(x,y) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t,y)\mathrm{d}t$; mais alors pour que g soit à support compact, il faut que $\displaystyle\int_a^b f(t,y)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $y \in]c,d[$; ceci induit un isomorphisme $\operatorname{coker}\psi_1 = C_c^\infty(U)/\operatorname{im}\psi_1 \simeq C_c^\infty\big(]c,d[\big)$ par l'application $\bar{g} \mapsto \displaystyle\int_a^b g(t,y)\mathrm{d}t$. (C'est la même construction que dans l'exercice 20, sauf qu'ici le résultat est une fonction en y.) On a déjà vu que $\psi_2 : C_c^\infty\big(]c,d[\big) \to C_c^\infty\big(]c,d[\big)$ est injective, ce qui montre l'injectivité de $\psi_2 : \operatorname{coker}\psi_1 \to \operatorname{coker}\psi_1$.

On en déduit, par théorème, que $H_0(\mathrm{DR}_c(U)) = 0$ et $H_1(\mathrm{DR}_c(U)) = 0$. On a par ailleurs : $H_2(\mathrm{DR}_c(U)) \simeq C_c^\infty(U)/(\operatorname{im}\psi_1 + \operatorname{im}\psi_2) \simeq \operatorname{coker}(\psi_2 : \operatorname{coker}\psi_1 \to \operatorname{coker}\psi_1)$. Cette dernière écriture permettra au lecteur de se convaincre (en s'aidant des raisonnements fait précédemment) que $H_2(\mathrm{DR}_c(U)) \simeq R$ défini par $\bar{g} \mapsto \displaystyle\int_a^b \int_c^d g(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.