Exercice 22. *Soient A un anneau, $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules et $E^\bullet$ et $E'^\bullet$ des résolutions projectives (ou libres) de M et M'. (c'est à dire des complexes vérifiant $\forall i > 0 : E^i = 0$, $H^0(E^\bullet) = M$ et $\forall i < 0 : H^i(E^\bullet) = 0$, et de même pour E'). On note π et π' les applications surjectives naturelles $E^0 \longrightarrow M$ et $E'^0 \longrightarrow M'$.*

(1) *Montrer qu'il existe des morphismes $E'^i \xrightarrow{\alpha^i} E^i$ tels que $\pi \circ \alpha^0 = f \circ \pi'$ et pour tout $i \leq 0$: $\mathrm{d}^i_E \circ \alpha^i = \alpha^{i+1} \circ \mathrm{d}^i_{E'}$.*

(2) *Pour tout i on pose $E''^i = E'^{i+1} \oplus E^i$ et $d^i_{E''} = \begin{pmatrix} -\mathrm{d}^{i+1}_{E'} & 0 \\ \alpha^{i+1} & \mathrm{d}^i_E \end{pmatrix}$. Montrer que $E''^\bullet$ est une résolution projective (ou libre) de M''. (Ce complexe est noté $M(\alpha)$.)*

(3) *Énoncer et démontrer un résultat analogue pour des résolutions injectives.*

Solution :

(1) Le raisonnement est illustré par le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes horizontales — qui sont exactes — et la dernière ligne verticale sont les données de départ :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
{} \arrow[r, dashed] & E'^{-2} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-2}_{E'}"] \arrow[d, dashed, "\alpha^{-2}"'] \arrow[dr, dotted, "\alpha^{-1}\circ \mathrm{d}^{-2}_{E'}"] & E'^{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-1}_{E'}"] \arrow[d, dashed, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, dotted, "\alpha^{0}\circ \mathrm{d}^{-1}_{E'}"] & E'^0 \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, dashed, "\alpha^0"'] \arrow[dr, dotted, "f\circ\pi'"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
{} \arrow[r, dashed] & E^{-2} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-2}_{E}"'] & E^{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-1}_{E}"'] & E^0 \arrow[r, "\pi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
 & & & & M'' \arrow[d] & \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

On considère les morphismes : $\begin{tikzcd} E'^0 \arrow[dr, dotted, "f\circ\pi'"'] & E^0 \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$; comme π est surjectif et E'^0 projectif, il existe un morphisme $\alpha^0 : E'^0 \to E^0$ tel que $\pi \circ \alpha^0 = f \circ \pi'$. On considère à présent les morphismes : $\begin{tikzcd} E'^{-1} \arrow[dr, dotted, "\alpha^0\circ \mathrm{d}^{-1}_{E'}"'] & E^{-1} \arrow[d, "\mathrm{d}^{-1}_E"] \\ & E^0 \end{tikzcd}$; comme $\pi \circ \alpha^0 \circ \mathrm{d}^{-1}_{E'} = f \circ \pi' \circ \mathrm{d}^{-1}_{E'}$ on en déduit que $\mathrm{im}(\alpha^0 \circ \mathrm{d}^{-1}_{E'}) \subset \ker \pi = \mathrm{im}\, \mathrm{d}^{-1}_E$. On peut donc réécrire les morphismes qui précèdent comme ceci : $\begin{tikzcd} E'^{-1} \arrow[dr, dotted, "\alpha^0\circ \mathrm{d}^{-1}_{E'}"'] & E^{-1} \arrow[d, "\mathrm{d}^{-1}_E"] \\ & \mathrm{im}\, \mathrm{d}^{-1}_E \end{tikzcd}$; comme E'^{-1} est projectif, on en déduit l'existence de $\alpha^{-1} : E'^{-1} \to E^{-1}$ tel que $\mathrm{d}^{-1}_E \circ \alpha^{-1} = \alpha^0 \circ \mathrm{d}^{-1}_{E'}$. De proche en proche on obtient des morphismes $\alpha^i : E'^i \to E^i$ tels que pour tout i on ait $\mathrm{d}^i_E \circ \alpha^i = \alpha^{i-1} \circ \mathrm{d}^i_{E'}$.

(2) On veut montrer que la suite :

$$\cdots \dashrightarrow \begin{matrix} E'^{-2} \\ \oplus \\ E^{-3} \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{-2} & 0 \\ \alpha^{-2} & -\mathrm{d}_E^{-3} \end{pmatrix}} \begin{matrix} E'^{-1} \\ \oplus \\ E^{-2} \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{-1} & 0 \\ \alpha^{-1} & -\mathrm{d}_E^{-2} \end{pmatrix}} \begin{matrix} E'^{0} \\ \oplus \\ E^{-1} \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^{0} & -\mathrm{d}_E^{-1} \end{pmatrix}} E^0 \xrightarrow{g\circ\pi} M'' \longrightarrow 0$$

est exacte. On vérifie d'abord que c'est un complexe :

— $g \circ \pi \circ \begin{pmatrix} \alpha^0 & -\mathrm{d}_E^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \circ \pi \circ \alpha^0 & -g \circ \pi \circ \mathrm{d}_E^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \circ f \circ \pi' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

— $\begin{pmatrix} \alpha^0 & -\mathrm{d}_E^{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{-1} & 0 \\ \alpha^{-1} & -\mathrm{d}_E^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^0 \circ \mathrm{d}_{E'}^{-1} - \mathrm{d}_E^{-1} \circ \alpha^{-1} & \mathrm{d}_E^{-1} \circ \mathrm{d}_E^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

— $\begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i+1} & 0 \\ \alpha^{i+1} & -\mathrm{d}_E^{i} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i} & 0 \\ \alpha^{i} & -\mathrm{d}_E^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i+1} \circ \mathrm{d}_{E'}^{i} & 0 \\ \alpha^{i+1} \circ \mathrm{d}_{E'}^{i} - \mathrm{d}_E^{i} \circ \alpha^{i} & \mathrm{d}_E^{i} \circ \mathrm{d}_E^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On montre enfin :

— $g \circ \pi$ est surjectif car g et π le sont ;

— Soit $x \in \ker(g \circ \pi)$; alors $\pi(x) \in \ker g = \operatorname{im} f$ donc il existe $y \in M'$ tel que $\pi(x) = f(y)$; mais π' est surjectif donc il existe $z \in E'^0$ tel que $y = \pi'(z)$; on a donc $\pi(x) = f \circ \pi'(z) = \pi \circ \alpha^0(z)$ d'où $x - \alpha^0(z) \in \ker \pi = \operatorname{im} \mathrm{d}_E^{-1}$; ce qui montre que $\ker(g \circ \pi) = \operatorname{im} \alpha^0 + \operatorname{im} \mathrm{d}_E^{-1} = \operatorname{im} \begin{pmatrix} \alpha^0 & -\mathrm{d}_E^{-1} \end{pmatrix}$.

– Soit $(x, y) \in \ker \begin{pmatrix} \alpha^0 & -\mathrm{d}_E^{-1} \end{pmatrix}$ ce qui signifie que $\alpha^0(x) = \mathrm{d}_E^{-1}(y)$; on a $f \circ \pi'(x) = \pi \circ \alpha^0(x) = \pi \circ \mathrm{d}_E^{-1}(y) = 0$ donc $\pi'(x) = 0$ car f est injectif et donc $x \in \ker \pi' = \operatorname{im} \mathrm{d}_{E'}^{-1}$; il existe donc $z \in E'^{-1}$ tel que $x = \mathrm{d}_{E'}^{-1}(z)$. On a alors $\mathrm{d}_E^{-1}(y) = \alpha^0 \circ \mathrm{d}_{E'}^{-1}(z) = \mathrm{d}_E^{-1} \circ \alpha^{-1}(z)$ donc $y - \alpha^{-1}(z) \in \ker \mathrm{d}_E^{-1} = \operatorname{im} \mathrm{d}_E^{-2}$; il existe donc $t \in E^{-2}$ tel que $y = -\mathrm{d}_E^{-2}(t) + \alpha^{-1}(z)$. On a donc bien $(x, y) \in \operatorname{im} \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{-1} & 0 \\ \alpha^{-1} & -\mathrm{d}_E^{-2} \end{pmatrix}$.

— Soit $(x, y) \in \ker \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i+1} & 0 \\ \alpha^{i+1} & -\mathrm{d}_E^{i} \end{pmatrix}$ ce qui signifie que $\mathrm{d}_{E'}^{i+1}(x) = 0$ et $\alpha^{i+1}(x) = \mathrm{d}_E^{i}(y)$; on a alors comme dans le cas précédent, $x = \mathrm{d}_{E'}^{i}(z)$ et $y - \alpha^i(z) = -\mathrm{d}_E^{i-1}(t)$ d'où $(x, y) \in \operatorname{im} \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i} & 0 \\ \alpha^{i} & -\mathrm{d}_E^{i-1} \end{pmatrix}$.

(3) Une résolution injective de M est un complexe $E^\bullet$ tel que $\forall i < 0 : E^i = 0$, $H^0(E^\bullet) = M$ et $\forall i > 0 : H^i(E^\bullet) = 0$. Si M et M'' ont des résolutions injectives, on note i et i'' les applications naturelles $M \longrightarrow E^0$ et $M'' \longrightarrow E''^0$ et on montre qu'il existe que morphismes $E^i \xrightarrow{\beta^i} E''^i$ tels que $\beta^0 \circ i = i'' \circ g$ et pour tout $i \geq 0 : \beta^{i+1} \circ \mathrm{d}_E^i = \mathrm{d}_{E''}^i \circ \beta^i$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & M' \arrow[d, "f"] & & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dotted, "i''\circ g"] & E^0 \arrow[r, "\mathrm{d}_E^0"] \arrow[d, dashed, "\beta^0"] \arrow[dr, dotted, "\mathrm{d}_{E''}^0\circ\beta^0"] & E^1 \arrow[r, "\mathrm{d}_E^1"] \arrow[d, dashed, "\beta^1"] \arrow[dr, dotted, "\mathrm{d}_{E''}^1\circ\beta^1"] & E^2 \arrow[d, dashed, "\beta^2"] \dashrightarrow \cdots \\
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r, "i''"] \arrow[d] & E''^0 \arrow[r, "\mathrm{d}_{E''}^0"] & E''^1 \arrow[r, "\mathrm{d}_{E''}^1"] & E''^2 \dashrightarrow \cdots \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

On montre alors que le complexe $M(\beta)$ (défini exactement comme $M(\alpha)$ dans la question 2) est une résolution injective de M', c'est à dire que la suite suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i\circ f} E^0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}_E^0 \\ \beta^0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} E^1 \\ \oplus \\ E''^0 \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}_E^1 & 0 \\ \beta^1 & -\mathrm{d}_{E''}^0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} E^2 \\ \oplus \\ E''^1 \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}_E^2 & 0 \\ \beta^2 & -\mathrm{d}_{E''}^1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} E^3 \\ \oplus \\ E''^2 \end{matrix} \;---$$