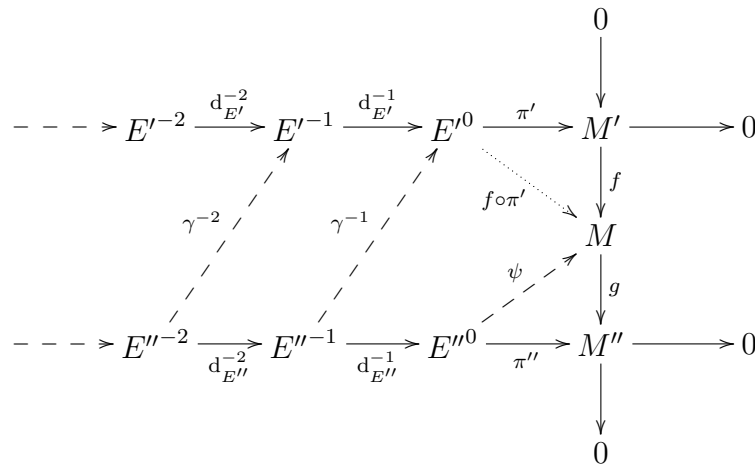


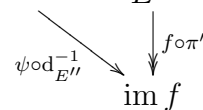
Exercice 23. Soient A un anneau, $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules et E'^{\bullet} et E''^{\bullet} des résolutions projectives (resp. injectives) de M' et M'' . Pour tout i on pose $E^i = E'^i \oplus E''^i$. Décrire des applications $d_E^i : E^i \rightarrow E^{i+1}$ telles que le complexe E^{\bullet} ainsi formé soit une résolution projective (resp. injective) de M .

Solution : On traite le cas des résolutions projectives. On note π' et π'' les applications naturelles $E'^0 \rightarrow M'$ et $E''^0 \rightarrow M''$.

- (1) On construit d'abord des morphismes $\psi : E''^0 \rightarrow M$ et pour tout $i \leq -1 : \gamma^i : E''^i \rightarrow E'^{i+1}$ tels que $\pi'' = g \circ \psi$, $\psi \circ d_{E''}^{-1} = (f \circ \pi') \circ \gamma^{-1}$ et pour tout $i \leq -1 : d_{E'}^i \circ \gamma^{i-1} = \gamma^i \circ d_{E''}^i$ comme illustré par le diagramme commutatif suivant :

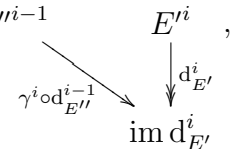


- Il existe un morphisme $\psi : E''^0 \rightarrow M$ tel que $g \circ \psi = \pi''$ car g est surjectif et E''^0 projectif.
- Comme $g \circ \psi \circ d_{E''}^{-1} = \pi'' \circ d_{E''}^{-1} = 0$ on en déduit que $\text{im}(\psi \circ d_{E''}^{-1}) \subset \ker g = \text{im } f = \text{im}(f \circ \pi')$. On a donc des morphismes $E''^{-1} \rightarrow E'^0$, or E''^{-1} est projectif donc



il existe $\gamma^{-1} : E''^{-1} \rightarrow E'^0$ tel que $\psi \circ d_{E''}^{-1} = (f \circ \pi') \circ \gamma^{-1}$.

- On construit enfin par récurrence descendante les morphismes $\gamma^i : E''^i \rightarrow E'^{i+1}$: comme par hypothèse de récurrence $d_{E'}^{i+1} \circ \gamma^i \circ d_{E''}^{i-1} = \gamma^{i+1} \circ d_{E''}^i \circ d_{E'}^{i-1} = 0$ on en déduit que $\text{im}(\gamma^i \circ d_{E''}^{i-1}) \subset \ker d_{E'}^{i+1} = \text{im } d_{E'}^i$. On a donc des morphismes $E''^{i-1} \rightarrow E'^i$,



or E''^{i-1} est projectif donc il existe $\gamma^{i-1} : E''^{i-1} \rightarrow E'^i$ tel que $d_{E'}^i \circ \gamma^{i-1} = \gamma^i \circ d_{E''}^{i-1}$.

- (2) On montre ensuite que la suite

$$\cdots \rightarrow \begin{array}{c} E'^{-2} \\ \oplus \\ E''^{-2} \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_{E'}^{-2} & \gamma^{-2} \\ 0 & -d_{E''}^{-2} \end{pmatrix}} \begin{array}{c} E'^{-1} \\ \oplus \\ E''^{-1} \end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_{E'}^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & -d_{E''}^{-1} \end{pmatrix}} \begin{array}{c} E'^0 \\ \oplus \\ E''^0 \end{array} \xrightarrow{(f \circ \pi' \quad \psi)} M \rightarrow 0$$

est exacte.

- C'est un complexe par construction de ψ et des γ^i .
- Si $x \in M$, alors il existe $z \in E''^0$ tel que $\pi''(z) = g(x)$ car π'' est surjectif, mais alors $g(x - \psi(z)) = g(x) - g \circ \psi(z) = g(x) - \pi''(z) = 0$ donc $x - \psi(z) \in \ker g = \text{im } f = \text{im}(f \circ \pi')$, donc il existe $t \in E'^0$ tel que $x - \psi(z) = f \circ \pi'(t)$; ceci montre que $(f \circ \pi' \quad \psi)$ est surjectif.
- Si $(x, y) \in \ker (f \circ \pi' \quad \psi)$ alors $\psi(y) = -f \circ \pi'(x)$ donc $\pi''(y) = g \circ \psi(y) = -g \circ f \circ \pi'(x) = 0$ donc il existe $z \in E''^{-1}$ tel que $y = -d_{E''}^{-1}(z)$, mais alors $f \circ \pi'(x - \gamma^{-1}(z)) = f \circ \pi'(x) - f \circ \pi' \circ \gamma^{-1}(z) = f \circ \pi'(x) - \psi \circ d_{E''}^{-1}(z) = f \circ \pi'(x) + \psi(y) = 0$ donc $x - \gamma^{-1}(z) \in \ker(f \circ \pi') = \ker \pi' = \text{im } d_{E'}^{-1}$ donc il existe $t \in E'^{-1}$ tel que $x = d_{E'}^{-1}(t) + \gamma^{-1}(z)$; finalement on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{E'}^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & -d_{E''}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}$; ceci montre que $\ker (f \circ \pi' \quad \psi) = \text{im} \begin{pmatrix} d_{E'}^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & -d_{E''}^{-1} \end{pmatrix}$.
- Si $(x, y) \in \ker \begin{pmatrix} d_{E'}^i & \gamma^i \\ 0 & -d_{E''}^i \end{pmatrix}$ alors $d_{E'}^i(x) + \gamma^i(y) = 0$ et $d_{E''}^i(y) = 0$ donc il existe $z \in E''^{i-1}$ tel que $y = -d_{E''}^{i-1}(z)$, mais alors $d_{E'}^i(x - \gamma^{i-1}(z)) = d_{E'}^i(x) - d_{E'}^i \circ \gamma^{i-1}(z) = d_{E'}^i(x) - \gamma^i \circ d_{E''}^{i-1}(z) = d_{E'}^i(x) + \gamma^i(y) = 0$ donc $x - \gamma^{i-1}(z) \in \ker d_{E'}^i = \text{im } d_{E'}^{i-1}$ donc il existe $t \in E'^{i-1}$ tel que $x = d_{E'}^{i-1}(t) + \gamma^{i-1}(z)$; finalement on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{E'}^{i-1} & \gamma^{i-1} \\ 0 & -d_{E''}^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}$; ceci montre que $\ker \begin{pmatrix} d_{E'}^i & \gamma^i \\ 0 & -d_{E''}^i \end{pmatrix} = \text{im} \begin{pmatrix} d_{E'}^{i-1} & \gamma^{i-1} \\ 0 & -d_{E''}^{i-1} \end{pmatrix}$.