Exercice 23. *Soient A un anneau, $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules et $E'^{\bullet}$ et $E''^{\bullet}$ des résolutions projectives (resp. injectives) de M' et M''. Pour tout i on pose $E^i = E'^i \oplus E''^i$. Décrire des applications $\mathrm{d}^i_E : E^i \longrightarrow E^{i+1}$ telles que le complexe $E^{\bullet}$ ainsi formé soit une résolution projective (resp. injective) de M.*

Solution : On traite le cas des résolutions projectives. On note π' et π'' les applications naturelles $E'^0 \to M'$ et $E''^0 \to M''$.

(1) On construit d'abord des morphismes $\psi : E''^0 \to M$ et pour tout $i \leq -1 : \gamma^i : E''^i \to E'^{i+1}$ tels que $\pi'' = g \circ \psi$, $\psi \circ \mathrm{d}^{-1}_{E''} = (f \circ \pi') \circ \gamma^{-1}$ et pour tout $i \leq -1 : \mathrm{d}^i_{E'} \circ \gamma^{i-1} = \gamma^i \circ \mathrm{d}^i_{E''}$ comme illustré par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, dashed] & E'^{-2} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-2}_{E'}"] & E'^{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-1}_{E'}"] & E'^0 \arrow[r, "\pi'"] \arrow[dr, dotted, "f\circ\pi'"'] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & & & & M \arrow[d, "g"] & \\
\cdots \arrow[r, dashed] & E''^{-2} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-2}_{E''}"'] \arrow[uur, dashed, "\gamma^{-2}"] & E''^{-1} \arrow[r, "\mathrm{d}^{-1}_{E''}"'] \arrow[uur, dashed, "\gamma^{-1}"] & E''^0 \arrow[r, "\pi''"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

— Il existe un morphisme $\psi : E''^0 \to M$ tel que $g \circ \psi = \pi''$ car g est surjectif et E''^0 projectif.

— Comme $g \circ \psi \circ \mathrm{d}^{-1}_{E''} = \pi'' \circ \mathrm{d}^{-1}_{E''} = 0$ on en déduit que $\mathrm{im}(\psi \circ \mathrm{d}^{-1}_{E''}) \subset \ker g = \mathrm{im}\, f = \mathrm{im}(f \circ \pi')$. On a donc des morphismes
$$\begin{tikzcd}
E''^{-1} \arrow[dr, "\psi\circ\mathrm{d}^{-1}_{E''}"'] & E'^0 \arrow[d, "f\circ\pi'"] \\
 & \mathrm{im}\, f
\end{tikzcd}$$
, or E''^{-1} est projectif donc il existe $\gamma^{-1} : E''^{-1} \to E'^0$ tel que $\psi \circ \mathrm{d}^{-1}_{E''} = (f \circ \pi') \circ \gamma^{-1}$.

— On construit enfin par récurrence descendante les morphismes $\gamma^i : E''^i \to E'^{i+1}$: comme par hypothèse de récurrence $\mathrm{d}^{i+1}_{E'} \circ \gamma^i \circ \mathrm{d}^{i-1}_{E''} = \gamma^{i+1} \circ \mathrm{d}^i_{E''} \circ \mathrm{d}^{i-1}_{E''} = 0$ on en déduit que $\mathrm{im}(\gamma^i \circ \mathrm{d}^{i-1}_{E''}) \subset \ker \mathrm{d}^{i+1}_{E'} = \mathrm{im}\, \mathrm{d}^i_{E'}$. On a donc des morphismes
$$\begin{tikzcd}
E''^{i-1} \arrow[dr, "\gamma^i\circ\mathrm{d}^{i-1}_{E''}"'] & E'^i \arrow[d, "\mathrm{d}^i_{E'}"] \\
 & \mathrm{im}\, \mathrm{d}^i_{E'}
\end{tikzcd}$$
, or E''^{i-1} est projectif donc il existe $\gamma^{i-1} : E''^{i-1} \to E'^i$ tel que $\mathrm{d}^i_{E'} \circ \gamma^{i-1} = \gamma^i \circ \mathrm{d}^{i-1}_{E''}$.

(2) On montre ensuite que la suite

$$\cdots \dashrightarrow \begin{matrix} E'^{-2} \\ \oplus \\ E''^{-2} \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}^{-2}_{E'} & \gamma^{-2} \\ 0 & -\mathrm{d}^{-2}_{E''} \end{pmatrix}} \begin{matrix} E'^{-1} \\ \oplus \\ E''^{-1} \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{d}^{-1}_{E'} & \gamma^{-1} \\ 0 & -\mathrm{d}^{-1}_{E''} \end{pmatrix}} \begin{matrix} E'^{0} \\ \oplus \\ E''^{0} \end{matrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f\circ\pi' & \psi \end{pmatrix}} M \longrightarrow 0$$

est exacte.

— C'est un complexe par construction de ψ et des γ^i.

— Si $x \in M$, alors il existe $z \in E''^0$ tel que $\pi''(z) = g(x)$ car π'' est surjectif, mais alors $g(x - \psi(z)) = g(x) - g \circ \psi(z) = g(x) - \pi''(z) = 0$ donc $x - \psi(z) \in \ker g = \operatorname{im} f = \operatorname{im}(f \circ \pi')$, donc il existe $t \in E'^0$ tel que $x - \psi(z) = f \circ \pi'(t)$; ceci montre que $\begin{pmatrix} f \circ \pi' & \psi \end{pmatrix}$ est surjectif.

— Si $(x, y) \in \ker \begin{pmatrix} f \circ \pi' & \psi \end{pmatrix}$ alors $\psi(y) = -f \circ \pi'(x)$ donc $\pi''(y) = g \circ \psi(y) = -g \circ f \circ \pi'(x) = 0$ donc il existe $z \in E''^{-1}$ tel que $y = -\mathrm{d}_{E''}^{-1}(z)$, mais alors $f \circ \pi'(x - \gamma^{-1}(z)) = f \circ \pi'(x) - f \circ \pi' \circ \gamma^{-1}(z) = f \circ \pi'(x) - \psi \circ \mathrm{d}_{E''}^{-1}(z) = f \circ \pi'(x) + \psi(y) = 0$ donc $x - \gamma^{-1}(z) \in \ker(f \circ \pi') = \ker \pi' = \operatorname{im} d_{E'}^{-1}$ donc il existe $t \in E'^{-1}$ tel que $x = \mathrm{d}_{E'}^{-1}(t) + \gamma^{-1}(z)$; finalement on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & -\mathrm{d}_{E''}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}$; ceci montre que $\ker \begin{pmatrix} f \circ \pi' & \psi \end{pmatrix} = \operatorname{im} \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{-1} & \gamma^{-1} \\ 0 & -\mathrm{d}_{E''}^{-1} \end{pmatrix}$.

— Si $(x, y) \in \ker \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i} & \gamma^{i} \\ 0 & -\mathrm{d}_{E''}^{i} \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{d}_{E'}^i(x) + \gamma^i(y) = 0$ et $\mathrm{d}_{E''}^i(y) = 0$ donc il existe $z \in E''^{i-1}$ tel que $y = -\mathrm{d}_{E''}^{i-1}(z)$, mais alors $\mathrm{d}_{E'}^i(x - \gamma^{i-1}(z)) = \mathrm{d}_{E'}^i(x) - \mathrm{d}_{E'}^i \circ \gamma^{i-1}(z) = \mathrm{d}_{E'}^i(x) - \gamma^i \circ \mathrm{d}_{E''}^{i-1}(z) = \mathrm{d}_{E'}^i(x) + \gamma^i(y) = 0$ donc $x - \gamma^{i-1}(z) \in \ker \mathrm{d}_{E'}^i = \operatorname{im} \mathrm{d}_{E'}^{i-1}$ donc il existe $t \in E'^{i-1}$ tel que $x = \mathrm{d}_{E'}^{i-1}(t) + \gamma^{i-1}(z)$; finalement on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i-1} & \gamma^{i-1} \\ 0 & -\mathrm{d}_{E''}^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}$; ceci montre que $\ker \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i} & \gamma^{i} \\ 0 & -\mathrm{d}_{E''}^{i} \end{pmatrix} = \operatorname{im} \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{E'}^{i-1} & \gamma^{i-1} \\ 0 & -\mathrm{d}_{E''}^{i-1} \end{pmatrix}$.