Exercice 24.

(1) Montrer que dans la catégorie des ensembles un morphisme est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si c'est une application injective (resp. surjective).

(2) Montrer que dans la catégorie des anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme.

Solution :

(1) Un monomorphisme est un morphisme $f : E \to F$ telle que pour tout $g : G \to E$ et tout $h : G \to E$ on a $f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$.

— Si $f : E \to F$ est injective et $g : G \to E$ et $h : G \to E$ deux applications telle que $f \circ g = f \circ h$ alors pour tout $x \in G$ on a $f(g(x)) = f(h(x))$ donc $g(x) = h(x)$ car f est injective, d'où $g = h$; ceci montre que f est un monomorphisme.

— Si f n'est pas injective on considère deux éléments $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, $g = \mathrm{Id} : E \to E$ et $h = \sigma_{x,y} : E \to E$ (la permutation de x et y). On a alors $f \circ g = f \circ h$ mais $g \neq h$ donc f n'est pas un monomorphisme.

Un épimorphisme est un morphisme $f : E \to F$ telle que pour tout $g : F \to G$ et tout $h : F \to G$ on a $g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$.

— Si $f : E \to F$ est surjective et $g : F \to G$ et $h : F \to G$ deux applications telle que $g \circ f = h \circ f$ alors pour tout $x \in F$ il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ mais alors $g(x) = g(f(y)) = h(f(y)) = h(x)$, d'où $g = h$; ceci montrer que f est un épimorphisme.

— Si f n'est pas surjective on considère un élément $x \in F \setminus f(E)$, $g : E \to E \sqcup \{0, 1\}$ tel que $g(x) = 0$ et $\forall y \neq x : g(y) = y$ et $h : E \to E \sqcup \{0, 1\}$ tel que $h(x) = 1$ et $\forall y \neq x : h(y) = y$. On a alors $g \circ f = h \circ f$ mais $g \neq h$ donc f n'est pas un épimorphisme.

(2) On note $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'inclusion naturelle et on considère $g : \mathbb{Q} \to A$ et $h : \mathbb{Q} \to A$ deux morphismes d'anneaux tels que $g \circ i = h \circ i$. Alors pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$ on a $1_A = g \circ i(1) = g\left(\frac{1}{1}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) g\left(\frac{q}{1}\right)$ donc $g\left(\frac{1}{q}\right)$ est inversible et $g\left(\frac{1}{q}\right) = \left(g\left(\frac{q}{1}\right)\right)^{-1} = (g \circ i(q))^{-1}$ et de même pour h. Donc pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on a $g\left(\frac{p}{q}\right) = (g \circ i(p)).(g \circ i(q))^{-1} = (h \circ i(p)).(h \circ i(q))^{-1} = h\left(\frac{p}{q}\right)$ donc $g = h$; ceci montre que $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux.